Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»
кафедра математической теории упругости и биомеханики

А.В. Доль, Д.В. Иванов

Серия ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

ВВЕДЕНИЕ
В ТЕОРИЮ УПРУГОСТИ

Учебно-методическое пособие
для студентов естественно-научных дисциплин

Саратов
2016

УДК 531/534
ББК 22.193я73
Д65

Доль А.В., Иванов Д.В.

Д65 Введение в теорию упругости: Учеб.-метод. пособие для студентов естественно-научных дисциплин. – Саратов: Амирит, 2016. – 28 с.: ил.
ISBN 978-5-9909127-1-7

Книга служит пособием для изучения основ теории упругости и ее приложения к решению задач вычислительной механики и биомеханики. Приведен ряд лекций, читаемых в магистратуре Саратовского университета на кафедре математической теории упругости и биомеханики. Приведены основные гипотезы механики сплошной среды, рассмотрены теоретические основы теории деформаций и напряжений, приведены основные уравнения и постановки задач теории упругости.

Для студентов, магистров, аспирантов и инженерно-технических работников, специализирующихся по вычислительной механике.

Работа выполнена при поддержке
Грантового конкурса Стипендиальной программы В. Потанина
(проект ГК160000862)

Рекомендуют к печати:
Кафедра математической теории упругости и биомеханики

Работа выполнена в авторской редакции

УДК 531/534
ББК 22.193я73

ISBN 978-5-9909127-1-7

Содержание

Введение

Теория упругости – это раздел механики сплошной среды, посвященный определению напряжений и деформаций, возникающих в теле под действием механических или температурных нагрузок. При этом в основе теории упругости не лежат недоказанные гипотезы и предположения (как, например, в случае сопротивления материалов), что позволяет получать более точные и строгие решения задач для тел произвольной формы.

Классическая теория упругости изучает напряженно-деформированное состояние тел, которые обладают следующими свойствами: сплошность, идеальная упругость, линейная связь напряжений и деформаций, малость перемещений, однородность, изотропность.

Линейная теория упругости рассматривает более широкий круг задач. В рамках этой теории могут рассматриваться тела, модель которых может быть неоднородной и анизотропной.

В связи с разработкой новых материалов и применением в различных конструкциях гибких элементов в последние десятилетия XX века стремительно развивалась *нелинейная* теория упругости, охватывающая еще больший круг задач определения напряженно-деформированного состояния. Нелинейность выделяют геометрическую и физическую.

Геометрическая нелинейность предполагает, что тело не обладает достаточной жесткостью, как, например, в случае гибких стержней.

Физическая нелинейность подразумевает, что тело не подчиняется закону Гука.

В случае резиноподобных материалов говорят, как правило, о геометрической и физической нелинейности одновременно.

Таким образом, в рамках нелинейной теории упругости модели материалов подчиняются лишь гипотезам о сплошности и идеальной упругости, в то время как остальные свойства могут определяться конкретным рассматриваемым объектом. Очевидно, что нелинейная теория является наиболее общей, охватывающей как классическую, так и линейную теорию упругости. Однако изучение, как и в любом другом разделе науки и техники, необходимо начинать с простых основ, поэтому в данном пособии приводятся основные гипотезы, определения и уравнения только линейной теории упругости.

Основы теории упругости необходимы при постановке и решении задач во многих областях науки и техники [1-9]. Кроме того, при решении задач численными методами, в частности методом конечных элементов, без базовых знаний в области теории упругости невозможно корректно задать все необходимые граничные и контактные условия и, зачастую, просто понять суть проблемы. Таким образом, знание основ теории упругости необходимо при использовании конечно-элементных программных пакетов, позволяющих решать соответствующие классы задач.

Основные гипотезы

Механика сплошной среды, частью которой, как было сказано выше, является теория упругости, основана на трех фундаментальных гипотезах: сплошности, евклидовости пространства и абсолютного времени. Такую механику сплошной среды принято называть *классической* или *ньютоновской*. Рассмотрим данные гипотезы подробнее.

1. Гипотеза сплошности (материального континуума).

Все реальные материальные тела представляются в виде конечного или бесконечного объема пространства, целиком и полностью заполненного материальным веществом.

Частица материального континуума – это бесконечно малый объем пространства, непрерывно заполненный материальным веществом.

2. Гипотеза евклидовости пространственного движения сплошной среды.

Пространство (с математической точки зрения) – множество точек, задаваемых с помощью чисел.

В трехмерном пространстве любой точке ставятся во взаимооднозначное соответствие 3 числа. Соответствие между точками пространства и числами осуществляется с помощью системы координат. Чтобы измерять расстояния между любыми двумя точками пространства, необходимо вводить *меру*.

Евклидова мера измеряет расстояние между двумя точками по прямой (рисунок 1).

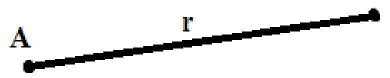

Рисунок 1 – Прямая, соединяющая две точки.

Если т.А имеет координаты (x_{ia}), а т.В (x_{ib}), где i меняется от 1 до 3, то расстояние между ними r будет вычислено (в случае евклидовой меры) по формуле (1):

$$r = \sqrt{\left(x_{ia} - x_{ib}\right)^2} \,. \qquad (1)$$

Будем предполагать, что в пространстве материального континуума вводится евклидова мера, и, следовательно, в этом пространстве может быть введена декартова система координат.

Если пространство движения сплошной среды имеет небольшие масштабы, то с достаточной точностью в нем всегда можно ввести евклидову меру, а значит, можно ввести единую декартову систему координат.

Примером неевклидовой меры может являться мера, измеряющая расстояния между точками на поверхности сферы по отрезку дуги большого круга (рисунок 2).

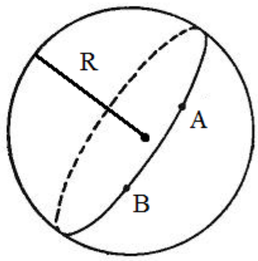

Рисунок 2 – Дуга большого круга, соединяющая точки на поверхности сферы.

Для всех точек, лежащих на поверхности сферы, невозможно ввести единую декартову систему координат. Однако это можно сделать для малого куска поверхности сферы. Для него евклидову меру с достаточной степенью точности всегда можно ввести, а, следовательно, можно ввести и декартову систему координат.

3. Гипотеза абсолютного времени.

Время – непрерывно изменяющийся параметр, показывающий последовательность каких-либо событий.

В классической механике полагается, что во всех системах координат, связанных как с самими телами, так и с пространством движения, время течет равномерно и одинаково. Эта гипотеза работает точно, если скорости движения материальных тел значительно меньше скорости света.

Теория деформации

Точки зрения Лагранжа и Эйлера на движение сплошной среды

Для изучения движения сплошной среды за некоторое конечное время t необходимо изучить движение каждой частицы сплошной среды за это время. Чтобы одну частицу отличить от другой, вводится *правило индивидуализации* [11].

Переменные Лагранжа – это 3 независимых параметра, которые индивидуализируют частицы сплошной среды. В качестве лагранжевых координат часто берут координаты токи пространства, в которой эта частица находилась в начальный момент времени.

Переменные Эйлера – это координаты точек пространства движения.

Таким образом, с точки зрения Лагранжа, наблюдение ведется за каждой частицей сплошной среды, а точка зрения Эйлера заключается в том, что наблюдаются не частицы, а точки пространства, через которые эти частицы могут проходить (точки наблюдения за движением).

В теории упругости, как правило, применяется способ описания движения Лагранжа, который позволяет определять перемещение материальной точки из начального положения, полученное в результате воздействия на тело внешних сил.

Вектор перемещения и деформированное состояние

Под действием внешних сил или в результате изменения теплового состояния тело меняет свои размеры и форму, то есть *деформируется* (рисунок 3) [10].

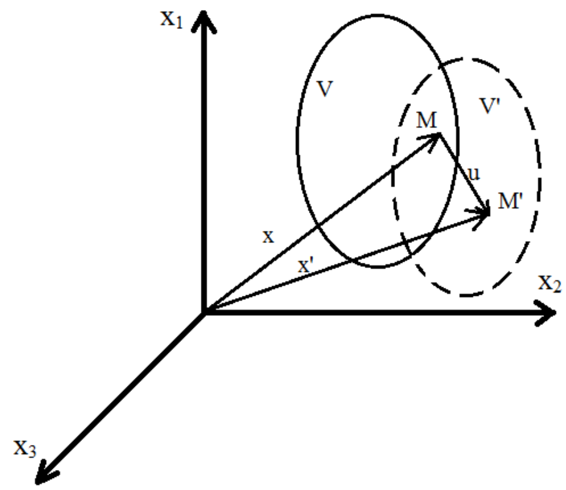

Рисунок 3 – Недеформированное и деформированное состояние тела.

Вектор $\vec{u} = \vec{MM'}$, соединяющий начальное и конечное положение точки М, называется ее *вектором перемещения*:

Переход тела из начального состояния V в новое состояние V‘ возможен вследствие перемещения тела, как абсолютно твердого, т.е. без изменения расстояний между любыми двумя его точками. Такое перемещение тела называется *жестким смещением.*

Если переход тела из начального состояния V в новое V‘ происходит вследствие изменения расстояний между его точками, то новое состояние V‘ называют *деформированным состояние тела.*

Деформированное состояние тела вполне определяется, если известны функции $u_i = u_i(x_k)$.

Деформированное состояние, определяемое линейными функциями $u_i = u_i(x_k)$, называют *однородным.* В этом случае любая прямая или плоскость, которые можно вообразить в состоянии тела V, переходят в прямую или плоскость в состоянии V‘.

Тензор деформации

При неоднородном произвольном деформировании тела функции $u_i = u_i(x_k)$ будут нелинейными. Но в этом случае в малой окрестности любой точки М тела деформированное состояние может рассматриваться как однородное, то есть элементы некоторой малой окрестности точки M, которые были прямолинейными до деформирования, останутся прямолинейными и после деформации.

Пусть в общем случае деформирования тела его две бесконечно близкие точки $M(x_i)$ и $N(x_i+dx_i)$, расстояние между которыми $ds = |d\bar{x}|$ в начальном состоянии V, перемещаются в положения $M'(x'_i)$ и $N'(x'_i+dx'_i)$ состояния V' (рисунок 4).

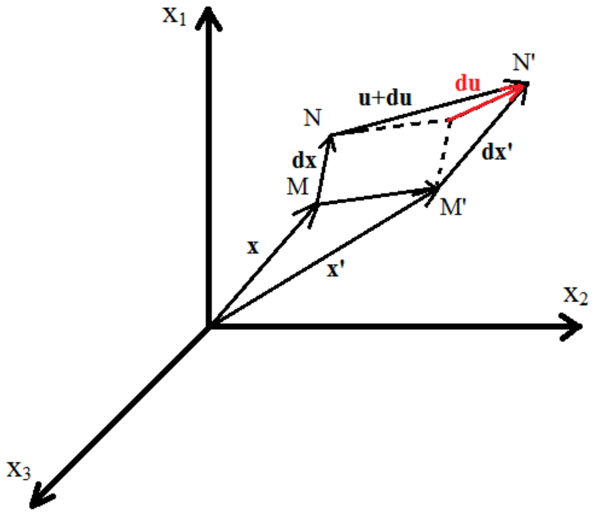

Рисунок 4 – Определение тензора деформации.

Компоненты du_i вектора перемещения точки N относительно точки M определяются по формуле (2):

$$du_i = u_{i,j} dx_j . \tag{2}$$

Несимметричный тензор ($u_{i,j}$), через компоненты которого определяются компоненты вектора относительного перемещения, называется *тензором относительного перемещения*.

Раскладывая тензор относительного перемещения на симметричную и антисимметричную (кососимметричную) части, получим:

$$e_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}) / 2 . \tag{3}$$

Тензор (e_{ij}) в формуле (3) называется *нелинейным тензором деформации.* Его компоненты образуют симметричную матрицу.

Диагональные компоненты тензора деформации характеризуют относительные удлинения, а компоненты, не лежащие на главной диагонали, характеризуют углы сдвига.

Тензор относительного перемещения ($u_{i,j}$) можно разложить на симметричный и антисимметричный тензоры, компоненты которых будут, соответственно, равны:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \tag{4}$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}). \tag{5}$$

Тогда формула (3) запишется в виде (6):

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} + (\varepsilon_{ki} + \omega_{ki})(\varepsilon_{kj} + \omega_{kj})/2 \tag{6}$$

Тензор (ε_{ij}) в формуле (4) называется *линейным тензором деформации.* Тензор (ω_{ij}) в формуле (5) называется *тензором малого поворота*.

Тензор малой деформации

Деформации называются *малыми*, если относительные удлинения ε_i и углы сдвига γ_{ij} являются малыми порядка $\eta \ll 1$. В случае малых деформаций тензор (ε_{ij}) называется *тензором малых деформаций*.

При незначительном деформировании тел, размеры которых существенно не отличаются друг от друга, компоненты тензора малой деформации совпадают с компонентами линейного тензора деформации. В дальнейшем будем называть этот тензор тензором деформации:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \tag{7}$$

Шесть независимых компонент тензора деформации определяются *дифференциальными зависимостями Коши*:

$$\begin{gathered} \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1},\ \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2},\ \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \\ \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right),\ \varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right),\ \varepsilon_{31} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right). \end{gathered} \tag{8}$$

При некоторых условиях нагружения тел, один из размеров которых существенно больше двух других (тонкий стержень, тонкостенный цилиндр) компоненты ε_{kj} имеют более высокий порядок малости, чем ω_{kj}, то есть могут возникать большие перемещения при малых деформациях. В этом случае компоненты тензора малых деформаций будут определяться формулой:

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ki}\omega_{kj} / 2 . \qquad (9)$$

Главные деформации и инварианты тензора деформации

Главные значения тензора деформации (ε_{ij}) определяются как корни кубического уравнения:

$$\varepsilon^3 - I_1(\varepsilon_{ij})\varepsilon^2 + I_2(\varepsilon_{ij})\varepsilon - I_3(\varepsilon_{ij}) = 0 , \qquad (10)$$

где $I_1(\varepsilon_{ij})$, $I_2(\varepsilon_{ij})$, $I_3(\varepsilon_{ij})$ – соответственно первый, второй и третий инварианты тензора деформации, которые определяются равенствами:

$$\left.\begin{array}{l} I_1(\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_{ii}, \\ I_2(\varepsilon_{ij}) = (\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj} - \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}) / 2, \\ I_3(\varepsilon_{ij}) = \left|\varepsilon_{ij}\right| = [\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{jk} - (\varepsilon_{ss})_3] / 3 + (\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj} - \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij})(\varepsilon_{ss}) / 2. \end{array}\right\} \qquad (11)$$

Главные значения тензора деформации называют *главными деформациями* и обозначают ε_i.

Первый (линейный) инвариант тензора деформации имеет смысл объемного расширения окрестности точки тела. Относительное объемное расширение или объемная деформация окрестности точки тела, таким образом, определяется по формуле:

$$\Theta = I_1(\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_{ii} . \qquad (12)$$

Условия совместности деформаций

Компоненты вектора перемещений u_i и компоненты тензора напряжений ε_{ij} связаны между собой дифференциальными зависимостями Коши. Эти зависимости позволяют определить компоненты ε_{ij} непосредственным дифференцированием компонент вектора перемещения u_i

при условии, что как компоненты тензора деформации, так и компоненты вектора перемещений являются непрерывными и однозначными функциями координат x_k.

Для решения обратной задачи, то есть определения трех компонентов u_i по известным компонентам тензора деформаций имеется шесть уравнений (8). Очевидно, что данная задача не может иметь однозначного решения, если компоненты ε_{ij} не будут подчиняться дополнительным зависимостям. Такие зависимости были впервые получены Сен-Венаном и имеют вид:

$$\varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jl,ik} - \varepsilon_{il,jk} - \varepsilon_{jk,il} = 0. \tag{13}$$

Уравнения (13) называют *условиями неразрывности* или *совместности деформаций*. Часто их также называют *дифференциальными зависимостями Сен-Венана*.

Теория напряжений

Внешние силы

Внешние силы, действующие на тело, разделяют на массовые и поверхностные.

Массовыми называются силы, действующие на частицы объема тела (сила тяжести, сила инерции).

Главный вектор массовых сил, действующих на тело, занимающее область V, и главный момент относительно начала координат определяются следующим образом:

$$\vec{R} = \iiint_V \rho \vec{f}(x_i) dV, \tag{14}$$

$$\vec{M} = \iiint_V \vec{r} \times \rho \vec{f}(x_i) dV. \tag{15}$$

Поверхностными называются силы, распределенные по поверхности S, ограничивающей область V, занятую телом.

Главный вектор и главный момент поверхностных сил определяются так:

$$\vec{R} = \iint_S \vec{t}\, dS, \tag{16}$$

$$\vec{M} = \iint_S \vec{r} \times \vec{t}\, dS. \tag{17}$$

Вектор напряжения и напряженное состояние

В недеформированном теле частицы располагаются таким образом, что оно находится в тепловом равновесии. При этом каждая его условная (мысленно выделенная) часть находится в состоянии механического равновесия, то есть главный вектор и главный момент сил, действующих на эту часть со стороны смежных частей, равны нулю. При деформировании тела происходит изменение относительного расположения его частиц друг относительно друга. В результате между частицами возникают дополнительные силы взаимодействия, которые стремятся вернуть тело в первоначальное (недеформированное) состояние. Такие внутренние силы могут быть определены методом сечений.

Мысленно проведем секущую плоскость S', проходящую через некоторую точку $M(x_i)$ тела. Таким образом, тело будет условно разделено на 2 части. Силы взаимодействия между соседними частицами, расположенными по обе стороны плоскости S', до его рассечения представляют собой внутренние силы. После условного разделения необходимо приложить эти силы к обеим частям тела на поверхности сечения, чтобы обе части оставались в положении равновесия. Таким образом, эти силы мысленно переходят в категорию внешних поверхностных.

Рассмотрим на поверхности S' первой части тела элементарную площадку площадью ΔS, содержащую точку $M(x_i)$. Обозначим главный вектор и главный момент поверхностных сил на данной площадке через $\Delta\vec{P}$ и $\Delta\vec{M}$, а единичный вектор нормали к S' в точке M через $\vec{n}$.

В классической теории упругости используется модель сплошной среды, в рамках которой между частицами по разделяющей их площадке осуществляется только силовое взаимодействие (безмоментная теория). Таким образом, устремляя площадь элементарной площадки к 0, то есть «стягивая» элементарную площадку в точку М, получим:

$$\lim_{\Delta S \to 0} (\Delta \vec{P} / \Delta S) = d\vec{P} / dS = \vec{p}_n, \tag{18}$$

$$\lim_{\Delta S \to 0} (\Delta \vec{M} / \Delta S) = 0. \tag{19}$$

Вектор $\vec{p}_n$, определяемый равенством (18), называется *вектором напряжения* в точке М на площадке с нормалью $\vec{n}$.

Множество векторов напряжения на всевозможных площадках, проходящих через рассматриваемую точку тела, определяет *напряженное состояние в этой точке. Напряженным состоянием тела* называется совокупность напряженных состояний во всех точках тела.

Если вектор напряжения зависит только от вектора нормали, а от координат точки тела не зависит, то напряженное состояние тела называется *однородным*.

Тензор напряжений

Рассмотрим произвольную точку М(x_i) деформированного тела и проходящую через нее произвольную площадку, определяемую вектором нормали $\vec{n}$. Совместим с точкой М начало системы координат, а за положительные направления внешних нормалей к координатным площадкам примем положительные направления координатных осей.

Выделим в окрестности точки М элементарный тетраэдр (рисунок 5), три грани которого перпендикулярны осям координат и проходят через точку М, а четвертая перпендикулярна вектору нормали $\vec{n}$. Тетраэдр находится в равновесии под действием поверхностных и, в общем случае, массовых сил, т.е. имеет место равенство:

$$\vec{p}_n = \vec{p}_i n_i + \vec{f} \rho h / 3, \tag{20}$$

где $\vec{p}_n$ – вектор напряжения на площадке с нормалью $\vec{n}$; $\vec{p}_i$ – вектора напряжений на соответствующих координатных плоскостях; n_i – компоненты векторов нормалей к граням тетраэдра, лежащих на координатных плоскостях; $\vec{f}$ – вектор массовых сил; h – высота перпендикуляра, опущенного из точки М на грань АВС.

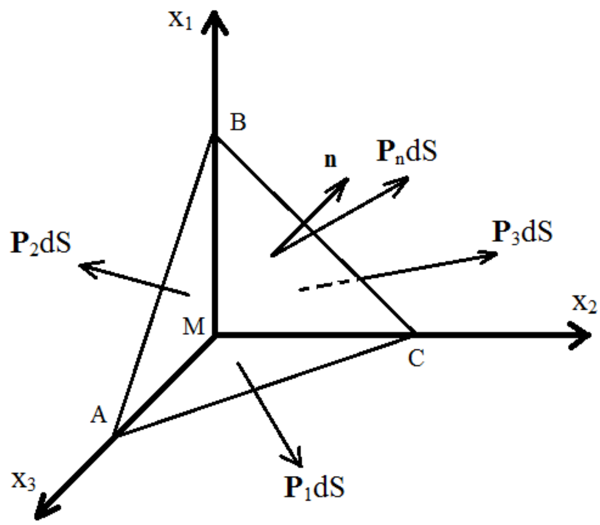

Рисунок 5 – Элементарный тетраэдр в точке М.

Чтобы определить вектор $\vec{p}_n$, будем перемещать грань АВС к точке М, при этом оставляя ее перпендикулярной вектору $\vec{n}$. Высота h в этом случае, очевидно, будет стремиться к нулю.

В результате получим:

$$\vec{p}_n = \vec{p}_i n_i, \tag{21}$$

$$p_{nj} = \sigma_{ij} n_i, \tag{22}$$

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Тензор второго ранга σ_{ij} (23) называется *тензором напряжений.* Диагональные элементы σ_{11}, σ_{22}, σ_{33} называются *нормальными напряжениями* на координатных площадках, остальные элементы матрицы – *касательные напряжения* на координатных площадках.

Дифференциальные уравнения равновесия

Пусть на деформируемое тело объемом V, ограниченное поверхностью S, действуют массовые и поверхностные силы, вызывающие малые перемещения его точек и, следовательно, малые деформаци.

Тело будет находиться в равновесии, если главный вектор и главный момент массовых и поверхностных сил будут равны нулю:

$$\vec{R} = \iint_S \vec{t}\, dS + \iiint_V \rho \vec{f} dV, \tag{24}$$

$$\vec{M} = \iint_S (\vec{r} \times \vec{t}) dS \iiint_V (\vec{r} \times \rho \vec{f}) dV. \tag{25}$$

Из уравнений (24), (25) может быть получена следующая форма уравнений равновесия:

$$\sigma_{ij,j} + \rho f_i = 0, \tag{26}$$

$$\sigma_{ij} n_j = t_i. \tag{27}$$

Соотношения (26) называются *уравнениями равновесия деформированного тела*. Соотношения (27) – *краевые* или *граничные условия*. Уравнения (26) и граничные условия (27) являются *необходимыми условиями равновесия деформированного тела*.

Принцип Сен-Венана

Во многих задачах поверхностные силы, приложенные к некоторой поверхности тела, известны только суммарно, а закон распределения известен лишь примерно или неизвестен вообще. Таким образом, имеют место затруднения в формулировке граничных условий.

Принцип Сен-Венана утверждает, что если к небольшому участку поверхности тела приложена система сил, главный вектор и главный момент которой равны нулю, то эта система сил вызывает локальное напряженно-деформированное состояние, быстро убывающее по мере удаления от участка приложения сил (рисунок 6).

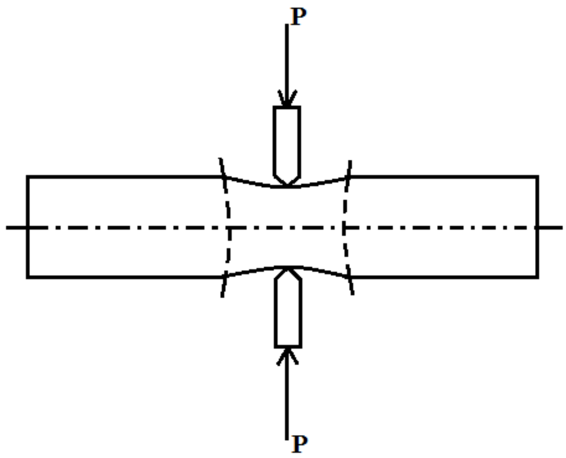

Рисунок 6 – Равные противоположно направленные силы действуют на стержень.

Принцип Сен-Венана может быть также сформулирован следующим образом: если некоторую совокупность поверхностных сил на сравнительно малой части поверхности тела заменить статически эквивалентной системой сил, действующих на той же части поверхности, то такая замена сил практически не изменит напряжений и перемещений в точках, удаленных от площадки приложения сил на расстояния, не меньшие наибольшего линейного размера этой площадки.

Соотношения между компонентами тензоров деформации и напряжения

Упругое поведение тел

Способность тел восстанавливать свою начальную форму и размеры при устранении внешнего воздействия называется *упругостью*, а снимаемые при этом деформации называются *упругими*.

При больших деформациях после снятия их вызвавших внешних сил в большинстве случаев (за исключением гиперупругих тел типа резины) тело не возвращается в свое начальное состояние. Полученные в этом случае деформации при разгрузке тела частично сохраняются. Эти оставшиеся деформации называются *остаточными* или *пластическими*.

Твердое тело называется *идеально упругим*, если напряженное состояние в любой его точке в произвольный момент деформирования зависит только от деформаций в этой точке (не зависит от температуры):

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}. \qquad (28)$$

Функция $W(\varepsilon_{ij})$ называется *упругим потенцилом* и представляет собой удельную работу деформации или удельную потенциальную энергию деформации. Равенство (28) называется *формулой Грина.*

Обобщенный закон Гука

Обобщенный закон Гука гласит, что компоненты σ_{ij} тензора напряжений в каждой точке тела являются однородными линейными функциями компонент ε_{ij} тензора деформации в той же точке рассматриваемого состояния равновесия тела.

Упругий потенциал $W(\varepsilon_{ij})$ представляет собой функцию второго порядка компонент тензора деформации, общее выражение которой можно записать в виде:

$$W(\varepsilon_{ij}) = C_{ij}\varepsilon_{ij} + C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}/2. \qquad (29)$$

Подставляя это выражение в формулу Грина (28), а также учитывая, что в начальном положении тела (при отсутствии внешних сил) W(0)=0 и $C_{ij}=0$, получим:

$$W(\varepsilon_{ij}) = C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}/2, \qquad (30)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}. \qquad (31)$$

Тензор (C_{ijkl}) называется *тензором упругих постоянных* (в случае однородного тела компоненты этого тензора не зависят от координат точек тела). Как тензор 4 ранга он имеет $3^4=81$ компоненту.

Из-за условий симметрии тензора C_{ijkl}, в самом общем случае он имеет 21 независимую компоненту. В общем случае анизотропии тела упругие постоянные зависят от ориентации координатных осей.

У тела, обладающего одной плоскостью упругой симметрии, число упругих постоянных равно 13.

Тело, обладающее тремя ортогональными плоскостями упругой симметрии, называется *ортотропным*. В этом случае число упругих постоянных будет равно 9.

Тело называется *изотропным*, если упругие свойства его, которые характеризуются упругими постоянными, одинаковы для всех направлений, выходящих из произвольной точки тела. В этом случае количество независимых упругих постоянных равно 2.

Обобщенный закон Гука для однородного изотропного тела

Тело называется *однородным* в отношении упругих свойств, если эти свойства одинаковы во всех точках тела, т.е. если упругие постоянные не зависят от координат точек тела.

Для однородного изотропного тела компоненты тензора упругих постоянных не зависят от направления координатных осей. В этом случае выражения для упругого потенциала, а также для связи тензоров напряжений и деформаций запишутся в виде:

$$W = \frac{1}{2}\left[\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\right]\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}, \qquad (32)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda\Theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \qquad (33)$$

$$\Theta = \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}. \qquad (34)$$

Упругие постоянные λ и μ называются *постоянными Ламе*. Из условия $W(\varepsilon_{ij})>0$ следует, что $\lambda>0$ и $\mu>0$.

Упругую постоянную Ламе μ называют *модулем упругости при сдвиге (модулем сдвига)* и часто обозначают G.

Часто вводят так называемые технические постоянные, которые определяются по формулам:

$$E = \frac{G(3\lambda + 2G)}{\lambda + G}, \qquad (35)$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + G)}. \qquad (36)$$

Величину E называют *модулем продольной упругости* или *модулем Юнга*, а ν – *коэффициентом поперечной деформации* или *коэффициентом Пуассона.*

Закон Гука иногда удобно записывать в других формах:

$$\sigma_{ij} = \lambda\Theta\delta_{ij} + G(u_{i,j} + u_{j,i}), \qquad \Theta = u_{s,s}. \qquad (37)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu(\Sigma)\delta_{ij}\right], \qquad \Sigma = \sigma_{ii}. \qquad (38)$$

В случае, когда помимо упругой деформации в теле возникает деформация под действием температуры, необходимо рассматривать общую деформацию тела в следующем виде:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}'' + \varepsilon_{ij}', \qquad (39)$$

где ε_{ij}'' – «силовая» или упругая деформация, а ε_{ij}' – тепловая деформация.

Будем рассматривать малые изменения температуры $\vartheta=T-T_0$ в точках тела, при которых тепловая деформация имеет величину одного порядка малости с ε_{ij}, а упругие постоянные материала и коэффициент линейного расширения α остаются при этом такими же, как при T_0.

В этом случае связь между напряжениями и деформациями получим в виде:

$$\sigma_{ij} = \lambda\Theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - \beta\vartheta\delta_{ij}, \qquad (40)$$

где $\beta = 3k\alpha,\ k = \lambda + \frac{2}{3}\mu.$

Величину k называют *изотермическим модулем объемного сжатия.*

Форма закона Гука (38) в этом случае примет вид:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu(\Sigma)\delta_{ij}\right] + \alpha\vartheta\delta_{ij}. \qquad (41)$$

Основные уравнения и задачи теории упругости

Основные уравнения

Деформированное состояние тела вполне определяется тензором поля деформации $\varepsilon_{ij}= \varepsilon_{ij}(x_k)$ или полем перемещений $u_i=u_i(x_k)$. Компоненты тензора деформации связаны с перемещениями дифференциальными зависимостями Коши и должны удовлетворять дифференциальным зависимостям Сен-Венана:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \tag{42}$$

$$\varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jl,ik} - \varepsilon_{il,jk} - \varepsilon_{jk,il} = 0. \tag{43}$$

Напряженное состояние тела определяется тензором поля напряжений $\sigma_{ij}=\sigma_{ij}(x_k)$. Компоненты тензора напряжений должны удовлетворять трем дифференциальным уравнениям равновесия:

$$\sigma_{ij,j} + \rho f_i = 0. \tag{44}$$

Компоненты тензора напряжений σ_{ij} и перемещения u_i связаны шестью уравнениями закона Гука:

$$\sigma_{ij} = \lambda\Theta\delta_{ij} + G(u_{i,j} + u_{j,i}). \tag{45}$$

К основным уравнениям, определяющим состояние линейно-упругого тела в его внутренних точках объема V, необходимо добавить условия на его поверхности S. Эти условия называются *граничными условиями*. Они определяются либо заданными внешними поверхностными силами t_i, либо заданными перемещениями $u_i^{(S)}$ точек поверхности тела. В первом случае граничные условия имеют вид:

$$\sigma_{ij} n_j = t_i. \tag{46}$$

Во втором случае граничные условия выражаются равенством:

$$u_i = u_i^{(S)}. \tag{47}$$

Граничные условия могут также иметь смешанный характер:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{ij} n_j \big|_{S_t} &= t_i \\ u_i \big|_{S_u} &= u_i^{(S)} \end{aligned}\right\}. \tag{48}$$

Основные задачи статики упругого тела

В зависимости от вида граничных условий различают три основных типа задач статики упругого тела.

Основная задача первого типа состоит в определении компонент тензора напряжений $\sigma_{ij}(x_k)$ внутри области V, занятой телом, и компонент вектора перемещений $u_i(x_k)$ внутри области V и на поверхности S по заданным массовым f_i и поверхностным t_i силам. Искомые девять функций должны удовлетворять уравнениям (44), (45), а также граничным условиям (46).

Основная задача второго типа состоит в определении компонент тензора напряжений $\sigma_{ij}(x_k)$ и компонент вектора перемещений $u_i(x_k)$ внутри области V по заданным массовым f_i и и по заданным перемещениям $u_i^{(S)}$ на поверхности тела. Искомые функции $u_i(x_k)$ и $\sigma_{ij}(x_k)$ должны удовлетворять уравнениям (44), (45), а также граничным условиям (47).

Основная задача третьего типа или *смешанная задача* состоит в том, что по заданным поверхностным силам $t_i(x_S)$ на одной части поверхности тела S_t и по заданным перемещениям $u_i^{(S)}$ (x_S) на другой части поверхности тела S_u, а также, вообще говоря, по заданным массовым силам f_i требуется определить компоненты тензора напряжений $\sigma_{ij}(x_k)$ и перемещения $u_i(x_k)$, удовлетворяющие уравнениям (44), (45), а также граничным условиям (48).

Уравнения упругого равновесия в перемещениях

Некоторые задачи статики упругого тела удобно решать в перемещениях. При этом основные уравнения следует выразить через перемещения. Уравнения равновесия с помощью несложных преобразований приводятся к виду:

$$\nabla^2 u_i + \frac{1}{1-2\nu}\Theta_{,i} = -\frac{\rho}{G} f_i, \tag{49}$$

где $\Theta = div\bar{u} = u_{j,j}$, $\nabla^2 u_i = u_{i,jj} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2}$.

Три уравнения (10) представляют собой уравнения упругого равновесия в перемещениях и называются *уравнениями Ламе*.

Заключение

В данном пособии рассмотрены основные понятия теории напряжений и деформаций в рамках механики сплошной среды. Приведены основные уравнения и соотношения линейной теории упругости, рассмотрены постановки основных задач статики упругого тела.

Знание базовых понятий и соотношений теории упругости необходимо при постановке и решении прикладных технических и научных задач. Без понимания основ механики численное решение прикладных и фундаментальных задач методом конечных элементов становится невозможным, поэтому данное пособие является необходимым для студентов естественно-научных дисциплин, связанных с математическим и численным моделированием механических процессов и систем.

Литература

1. Иванов Д.В., Доль А.В., Павлова О.Е., Аристамбекова А.В. Моделирование виллизиевого круга человека в норме и при патологии // Российский журнал биомеханики. – 2013. – Т. 17. – № 3 (61). – С. 49-63.
2. Глухова О.Е., Доль А.В., Колесникова А.С., Шунаев В.В. Новый подход к исследованию механических свойств многослойного графена с помощьюметода конечных элементов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2014. – Т. 14. – № 1. – С. 73-77.
3. Мельцер Р.И., Иванов Д.В., Лозовик И.П., Верховод А.Ю., Почепты Д.О. Послеоперационное ведение больных с неопорными переломами костей голени в условиях контролируемой осевой нагрузки // Ученые записки Петрозаводского государственного университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2013. – № 8 (137). – С. 37-39.
4. Ivanov D., Dol A., Pavlova O., Aristambekova A. Modeling of human circle of willis with and without aneurisms // Acta of Bioengineering and Biomechanics. 2014. Т. 16. № 2. С. 121-129.
5. Голядкина А.А., Иванов Д.В., Доль А.В., Полиенко А.В. Практические задания по применению пакета Ansys Mechanical APDL к задачам биомеханики сердечно-сосудистой системы: Учебно-методическое пособие для студентов естественно-научных дисциплин. – Саратов: Изд-во Саратовского университета, 2015. – 56 с.
6. Ломакин М.В., Лепилин А.В., Смирнов Д.А., Иванов Д.В., Доль А.В. Биомеханическое изучение напряженно-деформированного состояния в области коротких дентальных имплантатов в системе костная ткань-имплантат-абатмент // Российская стоматология. – 2013. – Т. 6. – № 1. – С. 21-24.

7. Доль А.В., Гуляев Ю.П., Иванов Д.В. Математические модели движения крови в системе сосудов с упругими стенками // Успехи современного естествознания. – 2014. – № 9. – С. 79-84.
8. Доль А.В., Гуляев Ю.П. Математические модели гемодинамики кровотока с учетом работы распределенного сердца // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 4-2. – С. 423-424.
9. Кузык Ю.И., Иванов Д.В., Доль А.В. Применение методов биомеханики в прогнозировании поведения каротидного атеросклероза // Актуальні проблеми сучасної медицини: Вісник української медичної стоматологічної академії. – 2016. – Т. 16. – № 1 (53). – С. 215-219.
10. Демидов С.П. Теория упругости: Учебник для вузов.– М.: Высшая школа, 1979. – 432 с.
11. Галин Г.Я. Механика сплошных сред в задачах. Теория и задачи. Том 1 / Г.Я. Галин, А.Н. Голубятников, Я.А. Каменярж, В.П. Карликов, А.Г. Куликовский, А.Г. Петров, Е.И. Свешникова, И.С. Шикина. / Под ред. Эглит М.Э. – М.: Московский лицей, 1996. – 396 с.

Учебное издание

ДОЛЬ АЛЕКСАНДР ВИКТОРОВИЧ
ИВАНОВ ДМИТРИЙ ВАЛЕРЬЕВИЧ

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ УПРУГОСТИ

Учебно-методическое пособие
для студентов естественно-научных дисциплин

Серия «Вычислительная механика»

Работа выполнена при поддержке

Грантового конкурса Стипендиальной программы В. Потанина (проект ГК160000862)

ISBN 978-5-9909127-1-7

Сдано в набор 19.10.2016. Подписано в печать 19.10.2016.
Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman.
Печ.л. 1,63. Уч.-изд. л. 1,89. Тираж 50. Зак. № 11/19106.

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ООО «Амирит»,
410056, г. Саратов, ул. Чернышевского, 88.
Тел.: 8-800-700-86-33 | (845-2) 24-86-33
E-mail: zakaz@amirit.ru
Сайт: amirit.ru.