САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА РАДИОТЕХНИКИ И ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

А.А. Клецов

“Квантово-полевые основы квантовой радиофизики”

Учебное пособие для студентов физического факультета, обучающихся по специальности «Радиофизика и электроника»

Саратов
2013

Настоящее учебно-методическое пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальности «Радиофизика и электроника», по направлению «Радиофизика». Материал излагается в соответствии с программой курса "Квантовая радиофизика" специальности «Радиофизика и электроника», направления «Радиофизика».

Аннотация: *В данной работе изложена квантовая теория поля в объеме, необходимом для изучения квантовой радиофизики. Основываясь на классической и квантовой механике, вводится процедура вторичного квантования через формализм операторов Бозе (операторов рождения и уничтожения). На модели квантового осциллятора объясняется сущность квантования полей. Также выводится основное уравнение квантовой теории поля – уравнение Клейна-Гордона-Фока. Пособие будет полезно для студентов, старающихся понять теоретическую базу, на которой построена квантовая радиофизика.*

Содержание

1. Классическая механика как основа квантовой механики и квантовой теории поля

Аналитическая (теоретическая) механика стоит на двух столпах: Гамильтоновом и Лагранжевом формализмах. Гамильтонов формализм (на котором основан математический аппарат квантовой механики) был задуман Уильямом Роуэном Гамильтоном в качестве приложения механики Лагранжа (основы квантовой теории поля) к геометрической оптике. Механика Лагранжа, в свою очередь, имеет начало в работах Эйлера. В самом же общем виде, формализм Лагранжа и Гамильтона был построен на фундаменте, заложенном еще в XVII веке Исааком Ньютоном. Таким образом, математически *квантовая механика и квантовая теория поля коренятся в механике Ньютона*.

1.1. Формализм Лагранжа

Лагранжиан

В формализме Лагранжа движение объекта описывается одной функцией L, называемой *функцией Лагранжа* или *Лагранжианом*. Выбор системы координат для описания движения является произвольным, что является сильной стороной Лагранжева (и Гамильтонова) формализма. Координаты $q_1,...,q_n$ (так называемые *обобщенные координаты*), определяющие местоположение объекта, относятся к различным точкам конфигурационного пространства. Выбранному набору обобщенных координат соответствует набор *"обобщенных скоростей"* $\dot{q}_1,...,\dot{q}_n$:

$$\dot{q}_1 = \frac{dq_1}{dt},...,\dot{q}_n = \frac{dq_n}{dt}.$$

Лагранжиан L является функцией всех обобщенных координат и скоростей:

$$L = L(q_1,...,q_n;\dot{q}_1,...,\dot{q}_n),$$

где $\dot{q}_i$ является независимой переменной (независимой также и от q_i). Обычная физическая интерпретация Лагранжиана – *разница между кинетической энергией системы и ее потенциальной энергией*:

$$L = K - U \quad (1.1.1)$$

При интегрировании Лагранжиана по времени получается другая важная в физике величина – *действие*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad (1.1.2)$$

которое, по сути, является произведением израсходованной во время движения энергии на затраченное время: $S \approx \Delta E \Delta t$.

Минимизируя вариацию (изменение) действия, можно определить путь, который “выбирает” частица, так как она всегда движется по пути наименьшего действия (то есть по пути наименьшего расхода энергии и затрат времени). Это – *принцип наименьшего действия (принцип Гамильтона)*, который записывается как

$$\delta S = 0 \quad (1.1.3)$$

где δS – *вариация действия* (добавка к минимально возможному значению действия для перемещения между двумя фиксированными точками). Путь, выбираемый частицей – это путь с *нулевой* вариацией действия, $\delta S = 0$.

Уравнения Эйлера-Лагранжа

Применяя принцип наименьшего действия, $\delta S = 0$, можно найти уравнения движения системы. Действительно, подставляя выражение (1.1.2) для действия в (1.1.3),

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt = 0$$

мы получаем уравнения, описывающие поведение системы через производные от Лагранжиана, называемые *уравнениями Эйлера-Лагранжа*:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathsf{L}}{\partial q_i} \quad (i = 1, ..., n) \quad (1.1.4)$$

Уравнения (1.1.4) как раз и отражают принцип наименьшего действия, из которого они получены.

Пример. Связь Лагранжева формализма с Ньютоновым.

Рассмотрим пример одной частицы с массой m, движущейся в присутствии гравитационного поля Земли, так что ее кинетическая энергия $K = 1/2 m v^2$, а потенциальная энергия $U = mgz$. Тогда, согласно (1.1.1), соответствующий Лагранжиан будет

$$\mathsf{L} = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 - mgz.$$

Производная Лагранжиана по скорости вдоль оси *z* будет $\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial}{\partial \dot{z}} (\frac{1}{2} m \dot{z}^2 - mgz) = m \dot{z}$, производная по времени от получившейся величины будет $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \dot{z}} = \frac{d}{dt} (m \dot{z}) = m \frac{d^2 z}{dt^2}$, производная по координате $\frac{\partial L}{\partial z} = -mg$, так что уравнения Эйлера-Лагранжа (1.1.4) дают $m\frac{d^2 z}{dt^2} = -mg$, откуда мы получаем известное из Ньютоновой механики выражение для постоянного гравитационного ускорения: $\frac{d^2 z}{dt^2} = -g$.

1.2. Формализм Гамильтона

От Лагранжа к Гамильтону

Еще в 1830-х годах Гамильтон применил идеи Лагранжа к геометрической оптике. Среди других новшеств он предложил изменение принципа наименьшего действия:

> "Хотя закон наименьшего действия и достиг звания одной из самых высоких теорем физики, однако его претензии на космологическую необходимость, на основании экономии во Вселенной, сейчас, по большому счету, отклонены. И этот отказ, среди прочих причин, сделан вследствие того, что величина, предположительно сохраняющаяся, на самом деле часто щедро расходуется."

Гамильтон предложил *принципы стационарного и меняющегося действия*.

В 1834 году, в своем *"Первом очерке общего метода в динамике"* Гамильтон предлагает свести метод решения 6(n - 1) обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (предложенный Лагранжем) к методу "поиска и дифференцирования *основной* функции", удовлетворяющей двум уравнениям первого порядка в частных производных (которые позже стали известны как *уравнения Гамильтона*).

Гамильтон вводит *жизненную силу* (которая ныне называется *кинетической энергии*)

$$K = \frac{1}{2}\sum m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

а также вводит *закон живых сил* (*закон сохранения энергии*):

$$H = K + U, \quad (1.2.1)$$

где U является *потенциальной энергией*, а величина H (*Гамильтониан системы*) – *полной энергией системы*, которая не зависит от времени при движении системы:

$$H = H(q_1,..., q_n; p_1,..., p_n),$$

то есть Гамильтониан есть полная энергия системы*, выраженная через канонические переменные – канонические координаты и канонические импульсы*.

Действительно, в гамильтоновом формализме, также как и в лагранжевом, мы используем обобщенные (канонические) переменные, однако, вместе с обобщенными (каноническими) координатами $q_1,...,q_n$, описывающими местоположение, мы принимаем соответствующие *обобщенные (канонические) импульсы* $p_1,...,p_n$ (а не скорости). Выражение для канонического импульса может быть получено из Лагранжиана:

$$p_i = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad (1.2.2)$$

Действительно, для одной частицы, движущейся в одном направлении, $\dot{q} = v$,поэтому $p = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}(K-U) = mv = p$.

Гамильтониан получается из Лагранжиана как

$$\mathrm{H} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathrm{L} \quad (1.2.3)$$

Пример. Гамильтон как полная энергия системы.

Докажем для частного случая, что Гамильтон по физической сути является полной энергией системы. Действительно, в случае одной частицы, движущейся в одном направлении, используя $\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{q}} = p$, выражение (1.2.3) дает

$$\mathrm{H} = vp - \mathrm{L} = mv^2 - (K-U) = 2K - K + U = K + U = E_{total} . \quad (1.2.4)$$

Канонические уравнения движения Гамильтона

Подобно уравнениям Эйлера-Лагранжа, Гамильтон в своем "*Втором очерке общего метода в динамике*" вывел из (1.2.3) уравнения, описывающие эволюцию системы во времени не через функцию Лагранжа L, а с помощью функции Гамильтона H ($6n$ уравнений для n частиц). Они стали настолько популярны в физике, что получили название “*канонические уравнения движения”*. Вот эти знаменитые уравнения (в той форме, в которой они были переписаны позднее Карлом Якоби):

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{dH}{dp_i}; \frac{dp_i}{dt} = -\frac{dH}{dq_i}. \quad (1.2.5)$$

Действительно, для одной свободной частицы, движущейся в одном направлении $\frac{dp}{dt} = m\frac{dv}{dt} = ma = F$, что является вторым законом Ньютона в оригинальной форме. $\frac{d\mathrm{H}}{dq} = \frac{d\mathrm{E}_{\text{total}}}{dx} = \frac{d}{dx}(K+U) = \frac{dU}{dx}$, так что уравнение (1.2.5) дает $F = -\frac{dU}{dx}$. что является известным результатом Ньютоновой физики: сила есть отрицательная производная от потенциальной энергии по координате.

Кроме того, для первой части выражения (1.2.5), зная, что $K = \frac{1}{2}mv^2$, имеем:

$\frac{dq}{dt} = \frac{dx}{dt} = v$, $\frac{d\text{H}}{dp} = \frac{1}{m}\frac{dE_{total}}{dv} = \frac{1}{m}\frac{d}{dv}(K+U) = \frac{1}{m}\frac{d}{dv}(\frac{1}{2}mv^2) = \frac{1}{m}\frac{1}{2}2mv = v$, так что первая часть выражения (1.2.5) дает нам тождество: $v = v$.

<u>Пример</u>. Уравнения Гамильтона для частицы в гравитационном поле Земли.

Для одной частицы с массой m, движущейся в гравитационном поле Земли, так что ее кинетическая энергия $1/2mv^2$, а потенциальная энергия mgz, соответствующий Гамильтониан, согласно с (1.2.4), есть

$$\text{H} = K + U = \frac{p^2}{2m} + mgz.$$

Используя уравнения Гамильтона (1.2.5), получим для частицы, движущейся в гравитационном поле Земли: $\frac{dq_i}{dt} = \frac{dz}{dt} = v$, $\frac{d\text{H}}{dp_i} = \frac{d}{dp_i}(\frac{p^2}{2m} + mgz) = \frac{p}{m} = v$, что удовлетворяет первому из уравнений (1.2.5).

Вопросы и задания к главе 1.

№ 1. Дайте выражения, определяющие *Лагранжиан* и *Гамильтониан*. В чем их разница?

Ответ.

Лагранжиан $L = L\left(q_1, \ldots q_n, \dot{q}_1, \ldots \dot{q}_n\right)$,где $q_, \dot{q}$ - обобщенные координаты.

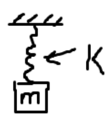
Гамильтониан $H = H\left(q_1, \ldots q_n, p_1, \ldots p_n\right)$,где q, p - координаты и канонические импульсы

В отличие от Лагранжиана, Гамильтониан не даёт явно релятивистски-инвариантного описания системы — энергия в разных инерциальных системах отсчёта различна.

№ 2. Изобразите гармонический осциллятор (блок массы *m*, колеблющийся с круговой частотой ω на пружинке с коэффициентом упругости *k*). Выведите из канонических уравнений Гамильтона (1.2.5) *каноническое уравнение гармонического осциллятора,* $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$.

Решение.

$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial(m\dot{x})}{\partial t} = m\ddot{x}$,



$$\frac{\partial H}{\partial q}=\frac{\partial}{\partial x}(K+U)=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{2}m\dot{x}^{2})+\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial x}=-F=-(-kx)=kx\,.$$

По уравнениям Гамильтона (1.2.5), с использованием $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$, $m\ddot{x}=-kx\rightarrow\ddot{x}+\omega^{2}x=0.$

2. Применение теории линейных операторов к микромиру

Для перехода от классической механики к квантовой необходимо вспомнить понятие *оператора*[1].

2.1. Линейные операторы и их матричное представление

Пусть каждому вектору $\vec{x}$ из пространства $\mathbb{R}^n$ *ставится в соответствие* вектор $\vec{y}$ из пространства $\mathbb{R}^m$, что обозначается как $\hat{A}:\vec{x}\rightarrow\vec{y}$. Тогда говорят, что в пространства $\mathbb{R}^n$ определено *преобразование* через *оператор* $\hat{A}$ (читается *“А с крышкой“*), действующий из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Тогда $\vec{y}$ находится путем *действия* оператора $\hat{A}$ на $\vec{x}$: $\vec{y}=\hat{A}\vec{x}$. Как функция есть рецепт нахождения по заданному числу другого числа, $y = f(x)$, так оператор – это рецепт нахождения по заданной функции другой функции.

Любая физическая величина в квантовой механике задается *линейным* оператором. *Линейный оператор* $\hat{L}$ - оператор, сопоставляющий (отображающий) функцию (вектор) $\vec{x}$ на *одну и только одну* функцию (вектор) $\vec{y}$, т.е. $\vec{y}=\hat{L}\vec{x}$ однозначно.

Свойства линейных операторов:

$$\hat{L}\left(X_1+X_2\right)=\hat{L}\left(X_1\right)+\hat{L}\left(X_2\right)$$

$\hat{L}\left(cX\right)=c\hat{L}\left(X\right)$, где c – константа.

Умножение и дифференцирование есть примеры линейных операторов. Действительно, оба этих оператора удовлетворяют приведенным выше свойствам линейных операторов.

<u>Матричное представление операторов</u>

Пусть $\hat{A}$ – линейный оператор (чья матрица имеет ранг 2), преобразующий вектор $\vec{x}$ двумерного пространства в вектор $\vec{y}$ того же пространства. Линейно-преобразованный вектор

[1] Студенту, забывшему вводный курс по основам квантовой механики, рекомендуется обратиться к нашему методическому пособию “Квантово-механические основы наноэлектроники”.

$\vec{y} = \hat{A}\vec{x}$ находится как произведение матрицы оператора $\hat{A}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, на исходный вектор $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

2.2. Пространство кет-векторов как Гильбертово пространство

Аналогом фазового пространства классической физики в квантовой механике является *Гильбертово пространство.* Гильбертово (Н) пространство – бесконечно-мерное пространство векторов $\vec{V}$ с конечной нормой (длиной), $\|V\| = \sqrt{\left(\vec{V}, \vec{V}\right)} < \infty$, соответствующее множеству квадратично-интегрируемых функций f $\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f|^2 \, dx < \infty \right)$.

Волновые функции Шредингера, Ψ (удовлетворяющие уравнению Шредингера $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + \hat{U}\Psi = E\Psi$), - непрерывные комплексно-значные функции от действительных переменных. Множество функций Ψ одинакового аргумента (а именно такими являются волновые функции Шредингера) образует *линейное векторное пространство*, где функции Ψ являются векторами этого пространства (а, точнее, одномерными подпространствами этого пространства). Постулировав *конечность нормы* волновой функции, Поль Дирак "подогнал" пространство волновых функций под Гильбертово пространство. Для выделения векторных свойств волновых функций Дирак предложил использовать скобки (бра и кет, что вместе означает "скобки", англ. bracket), и сопоставил волновой функции Шредингера *кет-вектор* Гильбертова пространства:

$$\Psi_A(x) \leftrightarrow |A\rangle.$$

Каждому состоянию частицы соответствует прямая линия (координатная ось) в Гильбертовом пространстве. Таких состояний для реальной квантовой частицы в природе - бесконечное число (с учетом бесконечного числа положений частицы), следовательно, и кет-векторов (а, точнее, независимых осей, соответствующих "измерениям" пространства), описывающих эти состояния - также бесконечное число.

Кет-вектор некоторого состояния частицы A, $|A\rangle$, соответствующий волновой функции $\Psi_A(x)$, представляется в виде *бесконечного столбца из значений функций* $\Psi_A(x)$ в каждой 'точке' x:

$$\left| A \right\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} \dots \\ \Psi_A(x) \\ \dots \end{pmatrix} \quad (2.2.1)$$

Таким образом, роль координат кет-вектора $\left| A \right\rangle$ в Гильбертовом пространстве играют все возможные значения соответствующей ему функции $\Psi_A(x)$.

2.3. Оператор эрмитова сопряжения

Оператор эрмитова сопряжения[II], † ("крест"), соответствует двум последовательно примененным операциям: транспонированию и комплексному сопряжению. Операция эрмитова сопряжения над некоторым оператором дает новый оператор, *эрмитово-сопряженный* данному. Матрицей, эрмитово-сопряженной данной, называют матрицу, получаемую из исходной матрицы путем ее транспонирования и перехода к комплексно-сопряжённой:

$$\hat{L}^{\dagger} = \left(\hat{L}^{T}\right)^{*} \quad (2.3.1)$$

Пример эрмитово-сопряженных операторов - операторы Бозе, $\hat{a}, \hat{a}^{\dagger}$ (см. разд. 4.2).

Если применение эрмитова оператора к некоему оператору переводит этот оператор в самого себя, то такой оператор называется *эрмитовым* (*самосопряженным, вещественным*). Условие *эрмитовости* (*вещественности*) оператора $\hat{\mathrm{L}}$ в терминах самого оператора,

$$\hat{L}^{\dagger} = \hat{L} \quad (2.3.2),$$

и в терминах элементов его матрицы,

$$l_{nm} = \left(l_{mn}\right)^{*} \quad (2.3.3).$$

Важно помнить, что *наблюдаемые* физические величины представляются соответствующими вещественными (эрмитовыми) операторами.

2.4. Дуальное пространство бра-векторов

В линейной алгебре известно, что каждому векторному пространству можно сопоставить *дуальное* (*сопряженное*) ему векторное пространство. Пространство бра-векторов - это и есть пространство, сопряженное Гильбертову (обозначается H^{*}). Бра-векторы - это *линейный функционалы*, определенные на H пространстве (линейном векторном пространстве кет-векторов). Всякая линейная функция от кет-вектора, $\varphi(\left| \mathrm{A} \right\rangle)$, определяет вектор нового типа -

[II] Название дано в честь французского математика XIX века Шарля Эрмита.

бра-вектор $\langle \mathrm{A} |$. Пространства H и H^* обладают линейным изоморфизмом, т.е. геометрически подобны друг другу.

Для введения *метрики* в векторное пространство кет-векторов предположили существование взаимно-однозначного соответствия между векторами кет-пространства и векторами дуального ему бра-пространства. Бра– ($\langle \mathrm{A} |$) и кет- ($| \mathrm{A} \rangle$) векторы, сопоставляемые друг другу в этом взаимном соответствии, являются эрмитово-сопряженными друг другу (см. разд. 2.3):

$$\langle \mathrm{A} | \equiv | \mathrm{A} \rangle^{\dagger}, | \mathrm{A} \rangle \equiv \langle \mathrm{A} |^{\dagger} \quad (2.4.1)$$

Напомним, что оператор эрмитова сопряжения, †, есть транспонирование плюс комплексное сопряжение. Следовательно, если $| \mathrm{A} \rangle$, согласно (2.2.1), является вектор-столбцом, то $\langle \mathrm{A} |$ - вектор-строка, чьи координаты являются числами, комплексно-сопряженными соответствующим координатам кет-вектора $| \mathrm{A} \rangle$:

$$\langle A | \leftrightarrow \left(\ldots \quad \Psi_A^*(x) \quad \ldots \right).$$

Поскольку кет- и бра-векторы принадлежат *разным* векторным пространствам (кет-векторы – пространству векторов-столбцов, бра-векторы - пространству векторов-строк), то их *не разрешено складывать*. Соответствие между кет- и бра- векторами антилинейно.

2.5. Гамильтониан и Лагранжиан в квантовой механике (каноническое квантование)

Изложенный в разделе 1.1 формализм Гамильтона лег в основу стандартной (нерелятивистской) квантовой механики. Переход от классической механики Гамильтона к квантовой механике микромира был осуществлен Вернером Гейзенбергом посредством *процедуры канонического квантования* (так как в микромире все квантовано, то есть существует в виде отдельных частей или уровней). Эта процедура заключается в *замене канонических координат и канонических импульсов (а в нестационарном случае - и канонических энергий) на соответствующие линейные операторы*:

$$x \to \hat{x}, p \to \hat{p} \equiv -i\hbar\nabla,\ E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad (2.4.1)$$

где $\hat{p} \equiv -i\hbar\nabla \equiv -i\hbar\left(\frac{d}{dx_1} + \frac{d}{dx_2} + \frac{d}{dx_3}\right).$

Процедура канонического квантования, примененная к закону сохранения энергии, дает *уравнение Шредингера для электрона как волнового пакета*. Действительно, Гамильтониан системы при каноническом квантовании становится линейным оператором, и, соответсвенно, кинетическая и потенциальная энергии также становятся линейными операторами:

$\hat{H} = \hat{K} + \hat{U}$, где $\hat{K} = \dfrac{\hat{p}^2}{2m} = \left\{ \hat{p} \equiv -i\hbar\nabla \right\} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$ (где $\nabla^2 = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial}{\partial z}\right)^2$ - Лапласиан). Тогда закон сохранения энергии в операторном виде, $\hat{K} + \hat{U} = \hat{E}$, переходит, путем выбора в качестве аргумента операторов волновой функции электрона, Ψ, в уравнение Шредингера:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + \hat{U}\Psi = E\Psi$$ (стационарное уравнение Шредингера),

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + \hat{U}\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$ (нестационарное уравнение Шредингера).

Напомним *коммутаторные (перестановочные) соотношения* для *коммутирующих* операторов,

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 0 \quad (2.4.2)$$

а также для *некоммутирующих* операторов,

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] \neq 0 \quad (2.4.3).$$

Операторы координаты и импульса в квантовой механике должны удовлетворять следующим коммутаторным соотношениям:

$$\left[q_k, q_l\right] = 0, \left[p_k, p_l\right] = 0, \left[p_k, q_l\right] = i\hbar\delta_{kl}, \quad (2.4.4)$$

Где $\delta_{kl} = \begin{cases} 1, k = l \\ 0, k \neq l \end{cases}$ – символ Кронекера.

В релятивистской квантовой механике (*квантовой теории поля*), Лагранжиан дает более естественную отправную точку: в отличие от Лагранжиана, Гамильтониан не даёт явно релятивистски-инвариантного описания системы — энергия в разных инерциальных системах отсчёта различна.

Квантовая теория поля рассматривает *не только частицы, но и поля* (что и объясняет ее название). Таким образом, мы должны научиться применять формализм Лагранжа и Гамильтона к полям. Это осуществляется посредством применения *уравнения Клейна-Гордона-Фока*, речь о котором пойдет в следующей главе.

Вопросы и задания к главе 2.

№ 1. Докажите условие эрмитовости оператора, $\hat{L}^{\dagger} = \hat{L}$, в терминах элементов соответствующей ему матрицы, $l_{nm} = \left(l_{mn}\right)^{*}$, на примере матрицы ранга 2. Подсказка: примените условие (2.3.1) к матрице ранга 2.

Решение.

Условие $\hat{L}^{\dagger} = \left(\hat{L}^{T}\right)^{*}$ дает

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\, l_{11} + \mathrm{Im}\, l_{11} = \mathrm{Re}\, l_{11} - \mathrm{Im}\, l_{11} \\ \mathrm{Re}\, l_{12} + \mathrm{Im}\, l_{12} = \mathrm{Re}\, l_{21} - \mathrm{Im}\, l_{21} \\ \mathrm{Re}\, l_{21} + \mathrm{Im}\, l_{21} = \mathrm{Re}\, l_{12} - \mathrm{Im}\, l_{12} \\ \mathrm{Re}\, l_{22} + \mathrm{Im}\, l_{22} = \mathrm{Re}\, l_{22} - \mathrm{Im}\, l_{22} \end{cases}$$

Из этого следует $l_{nm} = \left(l_{mn}\right)^{*}$. Q.E.D.

3. Основное уравнение квантовой теории поля

Приступим к построению квантовой теории поля на основе квантовой механики, но вначале приведем пример поля.

3.1. Поля Хиггса как пример скалярных полей

В стандартной теории происхождения Вселенной (теории большого взрыва) известен период[III], когда *виртуальные* (*невещественные*) частицы первичного квантового поля (ложного физического вакуума) преобразуются в *реальные* элементарные частицы материи. Появление же реальных частиц материи неразрывно связано с *полями Хиггса* (принадлежащими к классу скалярных полей). Поля Хиггса были введены в физику элементарных частиц в 1964 году британским ученым Питером Хиггсом.

Пространство Вселенной пронизано многими скалярными полями, значения которых *определяют энергию вакуума* (наинизшую возможную энергию), *а также массы частиц и взаимодействия между частицами*. Наряду с полями Хиггса, инфляционная теория включает в себя *векторные* (*бозонные*[IV]) поля, описывающие силовые взаимодействия (например, электромагнитное). Различные виртуальные частицы этих бозонных полей взаимодействуют с различными полями Хиггса. Масса частицы некоторого бозонного поля (и другие ее свойства) определяется ее взаимодействием с соответствующим полем Хиггса. Нулевое значение некоторого поля Хиггса соответствует нулевой массе частицы соответствующего бозонного поля (например, фотона), а ненулевое значение поля Хиггса соответствует бозонной частице с ненулевой массой.

[III] Так называемая “инфляционная эра”.

[IV] Скалярные и бозонные (калибровочные) поля по своей природе различны. Хиггсовские поля относятся к первым, а электромагнитное поле - к последним

3.2. Уравнение Клейна-Гордона-Фока для скалярных полей

Неинвариантность уравнения Шредингера

Построение квантовой теории поля началось с *релятивистского* обобщения уравнения Шредингера. Напомним нестационарное уравнение Шредингера (см. раздел 2.4) применительно к частице, движущейся во внешнем поле V (используя $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V$):

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi \quad (3.3.1)$$

Для работы с релятивистскими частицами (со скоростями, близкими к скорости света), квантовая механика должна была быть скорректирована *с учетом специальной теории относительности*, поэтому квантово-механический импульс $p_a = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_a}$ должен был быть обобщен на временную компоненту с $a = 0$ ($x_0 \equiv t$).

Известно, что в специальной теории относительности пространство и время являются смешанными вместе в едином пространственно-временном континууме, в котором пространство и время как отдельные объекты, могут изменяться (т.е. *не инвариантны*). То же самое справедливо для энергии и импульса релятивистской частицы: они не являются независимыми друг от друга величинами, но смешиваются, подобно тому, как смешиваются пространство и время, и, таким образом, также являются неинвариантными величинами. Следовательно, энергия, выражаемая в квантовой механике через оператор $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$, приводит к выводу, что оператор дифференцирования по времени $\frac{\partial}{\partial t}$ не является инвариантным, в результате чего уравнение Шредингера, $i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi$, также *релятивистски неинвариантно*.

Уравнения для релятивистской частицы должны удовлетворять требованиям релятивистской инвариантности (по отношению к пространственно-временному континууму). Поэтому Дирак не мог использовать уравнение Шредингера с его релятивистски неинвариантным оператором скорости изменения во времени $\partial/\partial t$.

Энергия и Гамильтониан для релятивистской частицы

Когда Дирак решил математически описать релятивистскую частицу, он столкнулся с несколькими трудностями. Согласно релятивистской формуле эквивалентности энергии-массы,

$$\mathrm{E}^2 = (\mathrm{mc}^2)^2 = (\mu \mathrm{c}^2)^2 + (pc)^2,$$

где μ - масса покоя (собственная масса), μc^2 - энергия покоя (собственная), p - импульс и $(pc)^2$ - кинетическая энергия (энергия движения) релятивистской частицы. Тогда *релятивистский Гамильтониан* (который состоит из энергии покоя μ и энергии движения) есть

$$H = E = (E^2)^{\frac{1}{2}} = (\mu^2 + p^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.3.2)$$

Мы используем релятивистскую систему единиц, где c = 1. В системе СИ вместо μ (масса покоя) используется μc^2 (энергия покоя), а вместо p^2 - $p^2 c^4$, где p^2 является оператором частных производных 2-го порядка, $-\hbar^2\nabla^2$.

Есть несколько проблем с выражением (3.3.2) для релятивистского Гамильтониана. Первая сложность заключается в его смысле. Необходимы специальные математические приемы, чтобы придать *физический* смысл выражению $(\mu^2 - \hbar^2\nabla^2)^{\frac{1}{2}}$. Еще одна трудность связана с неоднозначностью в знаке (которая является следствием квадратного корня и того, что волновые функции комплексно-значны). В случае наличия квадратного корня в уравнении оно может иметь два решения: положительное и отрицательное.

Уравнение Клейна-Гордона-Фока

В соответствии с формулой эквивалентности энергии-массы $E = mc^2$, вследствие неинвариантности энергии масса релятивистской частицы также оказывается неинвариантной относительно изменения положения частицы в пространственно-временном континууме. Тем не менее, масса покоя μ частицы (также называемая собственной массой), измеряемая в сопутствующей системе координат, является инвариантной (не зависящей от системы отсчета) величиной, поэтому она может быть использована для получения *релятивистски инвариантного* уравнения для движения частицы. В специальной теории относительности, используя $(\mathrm{m}c^2)^2 = (\mu c^2)^2 + (pc)^2$, собственная масса (энергия) находится как (в релятивистской системе единиц, где $c = 1$)

$$\mu^2 = m^2 - p^2. \quad (3.3.2a)$$

Мы используем эту релятивистскую энергию покоя μ (μc^2) вместо неинвариантной энергии $\mathrm{m}c^2$ в уравнении Шредингера (3.3.1). Тогда *каноническое квантование* (замена m на $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ и p на $-i\hbar\nabla$), примененное к (3.3.2a), $\mu^2 = m^2 - p^2$, дает:

$$\mu^2 = (i\hbar)^2[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \nabla^2] = (i\hbar)^2\Box, \quad (3.3.3)$$

где $\Box = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \nabla^2$ - *Даламбериан* (волновой оператор Даламбера), который является инвариантным относительно преобразований пространства и времени. Применяя тождество

(3.3.3) к волновой функции релятивистской частицы, мы получим релятивистский аналог уравнения Шредингера - *волновое уравнение для релятивистской частицы с массой покоя* μ (здесь мы перешли в естественную систему единиц, где $\hbar = 1$):

$$\mu^2\varphi = -\Box\varphi \to (\Box + \mu^2)\varphi = 0. \quad (3.3.4)$$

Это - основное уравнение квантовой теории поля и было получен в первый раз Шредингером, даже прежде, чем он вывел свое знаменитое нерелятивистское уравнение (3.3.1). В настоящее время оно называется *уравнением Клейна-Гордона-Фока*.

Проблемы с уравнением Клейна-Гордона-Фока

Решением уравнения Клейна-Гордона является, в частности, свободное скалярное поле (записанное в естественной системе единиц, где $\hbar = 1$) ,

$$\varphi(\vec{x},t) = e^{i\vec{p}\vec{x}}e^{-iEt} \quad (3.3.5)$$

Действительно, подставляя (3.3.5) в (3.3.4), получаем

$$m = \pm(\mu^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}$$

Таким образом, мы должны рассмотреть решения с "отрицательной энергией" как одно из физически возможных. Мы можем подумать, что частица с положительной энергией никогда не попала бы в состояние с отрицательной энергией (что справедливо для свободной частицы). Тем не менее, в присутствии электромагнитного поля релятивистские частицы с электрическим зарядом (например, электроны) могут, вследствие взаимодействия с э/м полем, перейти из состояния положительной энергии в состояние отрицательной энергии. Эта возможность существования частиц с отрицательной энергией и составляет *конфликт между специальной теорией относительности и квантовой механикой*[V].

Вопросы и задания к главе 3.

№ 1. Докажите, что свободное скалярное поле $\varphi(\vec{x},t) = e^{i\vec{p}\vec{x}}e^{-iEt}$ ($\hbar = 1$) является решением уравнением Клейна-Гордона-Фока (3.3.4).

[V] Этот конфликт был разрешен Полем Дираком, который вывел уравнение для релятивистского электрона. Это уравнение привело к замене электронов с отрицательной энергией на анти-электроны с положительной энергией и обладающих *положительным* зарядом, получивших название *“позитроны”*.

4. Квантование полей

4.1. Вторичное квантование

Проблемы с уравнением Клейна-Гордона-Фока (возможность отрицательных энергий частиц и отрицательная вероятность нахождения частицы в некоторой области) показали, что это уравнение не может описывать реальные частицы вещества (например, электроны). Физики предположили, что оно описывает скалярные поля (такие как поля Хиггса).

Для построения математического аппарата квантовой теории поля необходимо ввести *квантование полей*. Вспомним, что классическая механика Ньютона-Лагранжа-Гамильтона в квантовой механике переходит в квантовую механику Гейзенберга-Шредингера-Дирака путем канонического (*первичного*) квантования, которое заключается в

1) превращении канонические координат и импульсов в соответствующие операторы $\hat{x}$ и $\hat{p}$.

2) наложении на них коммутационных (перестановочных) соотношений (2.3.1):

$$\left[\hat{x}_k, \hat{x}_l\right] = 0, \left[\hat{p}_k, \hat{p}_l\right] = 0, \left[\hat{p}_k, \hat{x}_l\right] = i\hbar\delta_{kl}$$

В квантовой теории поля проводится аналогичная процедура, называемая *вторичным квантованием* (квантованием полей, а не координат и импульсов), при котором:

1) операторы $\hat{x}$ и $\hat{p}$ теряют статус операторов и снова становятся обычными координатами и импульсами;

2) поля приобретают статус операторов: $\varphi \to \hat{\varphi}$;

3) на операторы полей $\hat{\varphi}$ и сопряженных с ними импульсных полей $\hat{\pi}$ накладываются коммутационные соотношения.

В квантовой теории поля, также как и в квантовой механике, существуют квантовые состояния, но они являются не состояниями системы частиц (например, атома как системы ядро-электроны), а *состояниями полей*. Операторы полей действуют на эти состояния, *уничтожая или рождая частицы*. Таким образом, в квантовой теории поля *нарушается один из основных постулатов квантовой механики*: сохранность числа частиц в изолированной системе. Физически квантование поля означает представление поля *набором отдельных излучающих осцилляторов*. Поэтому математический аппарат, описывающий квантовую систему с изменяющимся числом частиц, основан на *гармоническом осцилляторе*.

4.2. Квантовый гармонический осциллятор

Рассмотрим классический осциллятор (частица массы m на пружинке, колеблющаяся вдоль оси – см. задание № 2 к главе 1). Частица гармонически колеблется с частотой ω около положения равновесия (начальной координаты). Пусть q – координата положения частицы на оси, p – её импульс. Тогда F = - kq = $-\mathrm{m}\omega^2\mathrm{q}$ - возвращающая сила. Уравнения движения выводятся из функции Гамильтониана (полной энергии),

$$\mathrm{H}=\mathrm{K}+\mathrm{U}=\frac{\mathrm{p}^2}{2\mathrm{m}}+\frac{\mathrm{kq}^2}{2}(\mathrm{p}^2+\mathrm{m}^2\omega^2\mathrm{q}^2)\frac{1}{2\mathrm{m}} \text{ (4.2.1).}$$

Квантовый осциллятора – аналог классического осциллятора, но колеблющаяся частица уже не подчиняется законам Ньютоновой механики, но квантовой. Оператор Гамильтона для квантового осциллятора получается из классического Гамильтониана (4.2.1) путем проведения первичного квантования, $x \to \hat{x}, p \to \hat{p}$ (см. разд. 2.4):

$$\hat{H}=\hat{K}+\hat{U}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{m\omega^2\hat{q}^2}{2} \text{ (4.2.2),}$$

причем $\hat{q}$ и $\hat{p}$ связаны коммутаторным соотношением (2.4.4),

$$\left[q,p\right]=i\hbar \text{ (4.2.3).}$$

Гамильтониан типа (4.2.2) встречается в задачах о квантовых колебаниях – теории вторичного квантования, использующейся в квантовой теории поля, теории кристаллических колебаний (квантовой теории твердого тела), теории многих тел, и т.д.

Выражение оператора Гамильтона через оператор числа частиц

Найдем собственные значения и собственные векторы оператора (4.2.2), $\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{m\omega^2\hat{q}^2}{2}$. Перейдем к новым координатам, $\hat{Q}$ и $\hat{P}$, связанным со старыми следующим образом:

$$\hat{q}=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\hat{Q},\ \hat{p}=\sqrt{m\hbar\omega}\hat{P} \text{ (4.2.4).}$$

Тогда (4.2.2) преобразуется:

$$\hat{H}=\frac{m\hbar\omega}{2m}\hat{P}^2+\frac{m\omega^2\hbar}{2m\omega}\hat{Q}^2=\frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{P}^2+\hat{Q}^2\right) \text{, (4.2.5)}$$

где эрмитовы операторы (являющиеся по сути приведенными координатой и импульсом) $\hat{Q}$ и $\hat{P}$ удовлетворяют коммутаторному соотношению

$$\left[\hat{Q},\hat{P}\right]=i \text{ (4.2.6).}$$

Это доказывается путем подстановки (4.2.4) в (4.2.3).

Мы можем выбрать координатное представление и решить уравнение Шредингера в этом представлении. Но лучше прямой метод Дирака: построить собственные векторы H, действуя на один из них соответствующими операциями (это есть метод построения векторного пространства ε динамических состояний системы).

Введем эрмитово-сопряженные (см. разд. 2.3) *операторы Бозе* $\hat{a},\hat{a}^{\dagger}$ и *оператор числа частиц*, $\hat{N}$:

$$\hat{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{Q}+i\hat{P}),\ \hat{a}^{\dagger}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{Q}-i\hat{P}), \quad (4.2.7)$$

$$\hat{N}=\hat{a}^{\dagger}\hat{a}. \quad (4.2.8)$$

Приведенные координату и импульс можно выразить через операторы Бозе:

$$\hat{Q}={}^{1}\!\big/_{\sqrt{2}}(\hat{a}+\hat{a}^{\dagger}),\ \hat{P}={}^{i}\!\big/_{\sqrt{2}}(\hat{a}^{\dagger}-\hat{a}). \quad (4.2.9)$$

Так как $\left[\hat{Q},\hat{P}\right]=i$, то

$\left[\hat{Q}\hat{P}\right]=\hat{Q}\hat{P}-\hat{P}\hat{Q}=\dfrac{i}{2}\left[(\hat{a}^{\dagger}+\hat{a})(\hat{a}^{\dagger}-\hat{a})-(\hat{a}^{\dagger}-\hat{a})(\hat{a}^{\dagger}+\hat{a})\right]=i[\hat{a}\hat{a}^{\dagger}-\hat{a}^{\dagger}\hat{a}]=i[\hat{a},\hat{a}^{\dagger}]=i$, откуда следует, что

$$[\hat{a},\hat{a}^{\dagger}]=1 \quad (4.2.10).$$

Выразим $\hat{H}$ из (4.2.5) через $\hat{a}^{\dagger}$ и $\hat{a}$ путем подстановки (4.2.9):

$$\hat{H}=\frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{P}^2+\hat{Q}^2\right)=\frac{\hbar\omega}{2}\left[\frac{i^2}{2}(\hat{a}^{\dagger}-\hat{a})^2+\frac{1}{2}(\hat{a}+\hat{a}^{\dagger})^2\right]=\frac{\hbar\omega}{2}[\hat{a}^{\dagger}\hat{a}+\hat{a}\hat{a}^{\dagger}]. \quad (4.2.11)$$

Выразим $\hat{H}$ через оператор числа частиц, $\hat{N}$. Для этого используем (4.2.10): $\hat{a}\hat{a}^{\dagger}-\hat{a}^{\dagger}\hat{a}=1\rightarrow\hat{a}\hat{a}^{\dagger}=1+\hat{a}^{\dagger}\hat{a}=\left\{\hat{a}^{\dagger}\hat{a}=\hat{N}\right\}=1+\hat{N}$. Тогда из (4.2.11) следует

$$\hat{H}=\frac{\hbar\omega}{2}(\hat{N}+\hat{N}+1)=\hbar\omega(\hat{N}+\frac{1}{2}). \quad (4.2.12)$$

Собственные значения и собственные состояния (векторы) оператора Гамильтона

Домножение обеих частей (4.2.10) на $\hat{a}$ дает

$$[\hat{a},\hat{a}^{\dagger}]=1\,|\,\hat{a}\Rightarrow\hat{a}\hat{a}^{\dagger}\hat{a}-\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\hat{a}=\hat{a}\Rightarrow\hat{N}\hat{a}=\hat{a}\hat{N}-\hat{a}\Rightarrow\hat{N}\hat{a}=\hat{a}(\hat{N}-1).$$

Следовательно, оператор $\hat{a}$ *уменьшает* число частиц на 1, поэтому он называется *оператором уничтожения (смерти)*. Аналогично, домножение обеих частей (4.2.10) на $\hat{a}^{\dagger}$ дает

$$\hat{N}\hat{a}^{\dagger} = \hat{a}^{\dagger}(\hat{N}+1).$$

Следовательно, оператор $\hat{a}^{\dagger}$ *увеличивает* число частиц на 1, поэтому он называется *оператором рождения*.

Задача на собственные значения Гамильтониана $\hat{H} = \frac{1}{2}[\hat{a}\hat{a}^{\dagger}]_{+} = \hat{N} + \frac{1}{2}$ эквивалентна задаче построения собственных векторов оператора $\hat{N}$, к чему мы и переходим.

Теорема о собственных значениях и собственных векторах оператора $\hat{N}$

Если $|\nu\rangle$ - собственный вектор оператора $\hat{N}$, а ν - соответствующее собственное значение ($\hat{N}|\nu\rangle = \nu|\nu\rangle$), то

1) $\nu \geq 0$;
2) если $\nu = 0 \Rightarrow \hat{a}|\nu\rangle = 0$ (оператор уничтожения дает 0)
   В остальных случаях $\hat{a}|\nu\rangle$ есть $\neq 0$ вектор с нормой $\nu\langle\nu|\nu\rangle$, причем это собственный вектор оператора $\hat{N} = \hat{a}^{\dagger}\hat{a}$, принадлежащий собственному значению $\nu - 1 \leftrightarrow \hat{a}^{\dagger}\hat{a}(\hat{a}|\nu\rangle) = \nu - 1(\hat{a}|\nu\rangle)$
3) Вектор $\hat{a}^{\dagger}|\nu\rangle \neq 0$, его норма $\langle\nu|\hat{a}\hat{a}^{\dagger}|\nu\rangle = (\nu+1)\langle\nu|\nu\rangle$, причем это собственный вектор $\hat{N} = \hat{a}^{\dagger}\hat{a}$, принадлежащий собственному значению $\nu + 1$

Доказательство

По предположению, $\hat{N}|\nu\rangle = \nu|\nu\rangle$, (так как ν - собственные значения $\hat{N}$), $(\langle\nu|\nu\rangle) > 0$.

Используя $\hat{N} = \hat{a}^{\dagger}\hat{a}$ и $[\hat{a},\hat{a}^{\dagger}] = 1 \Rightarrow \langle\nu|\hat{a}^{\dagger}\hat{a}|\nu\rangle = \langle\nu|\hat{N}|\nu\rangle = \langle\nu|(\nu|\nu\rangle) = \nu\langle\nu|\nu\rangle =$ норма вектора $\hat{a}|\nu\rangle$ Следовательно, $\left|\hat{a}|\nu\rangle\right|^{2}$.

Аналогично,
$\langle\nu|\hat{a}\hat{a}^{\dagger}|\nu\rangle = \langle\nu|(\hat{N}+1)|\nu\rangle = \langle\nu|(\hat{N}|\nu+1|\nu\rangle) = \langle\nu|(\nu|\nu\rangle + 1|\nu\rangle) = \langle\nu|\cdot(\nu+1)|\nu\rangle = (\nu+1)\langle\nu|\nu\rangle$.

Однако, норма вектора в Гильбертовом пространстве либо > 0, либо = 0, причем равенство нулю нормы вектора – необходимое и достаточное условие равенства нулю вектора. Для выполнения этого постулата необходимо и достаточно, чтобы $\nu \geq 0$ (свойство (1)). Условие равенства нулю вектора $\hat{a}|\nu\rangle$ - частный случай уравнения $\langle\nu|\hat{a}^{\dagger}\hat{a}|\nu\rangle = \nu\langle\nu|\nu\rangle$. С другой стороны, векторы $\hat{a}^{\dagger}|\nu\rangle$ и $\hat{a}|\nu\rangle$ действительно удовлетворяют уравнениям на собственные значения. Действительно,

$\hat{N}(\hat{a}|\nu\rangle) = \{\hat{N}\hat{a} = \hat{a}(\hat{N}-1)\} = \hat{a}(\hat{N}-1)|\nu\rangle = \hat{a}(\hat{N}|\nu\rangle - 1|\nu\rangle) = \hat{a}(\nu|\nu\rangle - 1|\nu\rangle) = \hat{a}(\nu-1)|\nu\rangle = (\nu-1)\hat{a}|\nu\rangle \Rightarrow \hat{a}|\nu\rangle -$ собственный вектор оператора $\hat{N}$, соответствующий собственному значению ($\nu - 1$) (т.к. из условия $\hat{L}|l\rangle = \langle l|l\rangle \Rightarrow l$ - собственное значение вектора $|l\rangle$).ъ

Аналогично,

$\hat{N}(\hat{a}^{\dagger}|\nu\rangle) = \{\hat{N}\hat{a}^{\dagger} = \hat{a}^{\dagger}(\hat{N}+1)\} = \hat{a}^{\dagger}(\hat{N}+1)|\nu\rangle = \hat{a}^{\dagger}(\hat{N}|\nu\rangle + 1|\nu\rangle) = \hat{a}^{\dagger}(\nu|\nu\rangle + 1|\nu\rangle) = \hat{a}^{\dagger}(\nu+1)|\nu\rangle = (\nu+1)\hat{a}^{\dagger}|\nu\rangle \Rightarrow \hat{a}^{\dagger}|\nu\rangle -$ $\hat{a}^{\dagger}|\nu\rangle$ собственный вектор оператора $\hat{N}$ с соответствующим собственным значением $(\nu+1)$.

Спектр и базисная система собственных функций оператора $\hat{N}$

Если собственные значения оператора $\hat{N}$, $\nu > 0$ (доказано), то теорема о собственных значениях и собственных векторах $\hat{N}$ применима и к вектору $\hat{a}|\nu\rangle$, соответствующему собственному значению $\nu - 1$. Действительно, $\hat{a}|\nu\rangle$ - собственный вектор с собственным значением $\nu - 1 \Rightarrow$ т.к. собственное значение $\geq 0 \Rightarrow \nu - 1 \geq 0 \Rightarrow \nu \geq 1$. Если $\nu > 1$, то теорема применима и к векторам $\hat{a}\hat{a}|\nu\rangle = \hat{a}^2|\nu\rangle$, соответствующим собственному значению $\nu - 2 \Rightarrow$ образуем последовательность собственных векторов $\hat{a}|\nu\rangle$, $\hat{a}^2|\nu\rangle$, … , $\hat{a}^p|\nu\rangle$, …, с собственными значениями $\nu - 1$, $\nu - 2$, … , $\nu - p$, … - она конечна, т.к. собственные значения $\hat{N}$ ограничены снизу нулем. Т.е., начиная с $n+1$, все векторы последовательности равны нулю: действие $\hat{a}$ на собственный (отличный от нуля) вектор $\hat{a}^n|\nu\rangle$ с собственным значением ($\nu - n$) дает 0 $\Rightarrow$ согласно утверждению (2) теоремы, $\hat{a}|\nu\rangle$ - собственный вектор с собственным значением $\nu - 1$. Это значит, что $\nu = n$.

Аналогично, применяя теорему о собственных значениях и собственных векторах $\hat{N}$ к вектору $\hat{a}^{\dagger}|\nu\rangle$ ($\neq 0$), соответствующему собственному значению $\nu + 1$, затем к вектору $(\hat{a}^{\dagger})^2|\nu\rangle$ и т.д., получаем неограниченную последовательность отличных от нуля векторов $\hat{a}^{\dagger}|\nu\rangle$, $(\hat{a}^{\dagger})^2|\nu\rangle$, … , $(\hat{a}^{\dagger})^p|\nu\rangle$, …, являющуюся набором собственных векторов оператора $\hat{N}$, соответствующих собственным значениям $\nu + 1$, …, $\nu + p$, … $\Rightarrow$ Спектр собственных значений оператора $\hat{N}$ образован последовательностью целых неотрицательных чисел, n. Последовательность собственных векторов, каждый из которых соответствует одному из значений спектра получается повторяющимся действием операторов Бозе $\hat{a}$ и $\hat{a}^{\dagger}$ на один из этих векторов. Это множество векторов, $|0\rangle, |1\rangle, \ldots, |n\rangle, \ldots$, образует полную (замкнутую) ортонормированную систему. Действительно, можем показать, что любая функция от $\hat{a}$ и $\hat{a}^{\dagger}$, коммутирующая с $\hat{N}$, является функцией $\hat{N} \Rightarrow \hat{N}$ образует *полный набор коммутирующих наблюдаемых* с *невырожденными собственными значениями*. Последовательности ортонормированных векторов $|0\rangle, |1\rangle, \ldots, |n\rangle, \ldots$, соответствуют следующие собственные значения оператора $\hat{N}$: 0, 1, …, n, … .

Собственные векторы связаны рекуррентными соотношениями:

$$\hat{a}^{\dagger}|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, (n \neq 0), \hat{a}|0\rangle = 0.$$

Собственные векторы получаются из вектора $|0\rangle$ по формуле:

$$\left|n\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^{\dagger})^{n}\left|0\right\rangle \Rightarrow \left|1\right\rangle = \hat{a}^{\dagger}\left|0\right\rangle, \left|2\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}^{\dagger})^{2}\left|0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}^{\dagger}\left|1\right\rangle \Rightarrow \hat{a}^{\dagger}\left|1\right\rangle = \sqrt{2}\left|2\right\rangle$$

Собственные векторы удовлетворяют уравнению на собственные значения и нормированы на 1 $\leftrightarrow \left\langle n \middle| n' \right\rangle = \delta_{nn'} = \begin{cases} 1, n = n' \\ 0, n \neq n' \end{cases}$

Записав оператор числа частиц в матричной форме в N-представлении (по собственным векторам этого оператора),

$$\hat{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (4.2.13)$$

мы увидим физический смысл собственного вектора $\left|n\right\rangle$ оператора числа частиц: $\left|n\right\rangle$ показывает *число частиц в данном состоянии*. Особый смысл имеет вектор $\left|0\right\rangle$ - это *состояние с нулевым количеством реальных частиц (физический вакуум).*

Собственные значения Гамильтониана квантового осциллятора

Формулы (4.2.12) и (4.2.13) дают Гамильтониан $\hat{H}$ в матричной форме в N-представлении:

$$\hat{H} = \hbar\omega \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad (4.2.14)$$

Форма (4.2.14) показывает физический смысл матрицы $\hat{H}$ квантового осциллятора: *энергия системы осцилляторов рассчитывается как* $\hbar\omega(n + \frac{1}{2})$*,* где n – число частиц в состоянии $\left|n\right\rangle$.

Для чего мы все это выводили? Главное здесь – уяснить, что физическое поле (например, электромагнитное) может быть представлено в виде набора квантовых осцилляторов. При этом формализм операторов Бозе математически и есть суть *вторичного квантования.*

Вопросы и задания к главе 4.

№ 1. Докажите, что $\left[\hat{Q}, \hat{P}\right] = i$. Подсказка: подставьте (4.2.4) в (4.2.3).

№ 2. Предположим, что мы квантуем электромагнитное поле. Квант электромагнитного поля называется фотон. Сколько фотонов может находиться в одном микросостоянии поля? Подсказка: какой статистике подчиняются фотоны?

Библиография

1. Мессиа А., *Квантовая механика, том 2,* пер. с фр., М.: Наука, 1979
2. Дирак П.А.М., *Принципы квантовой механики*, изд. 2, пер. с анг., М.: Наука, 1979
3. Ханин Я.И., *Лекции по квантовой радиофизике,* Н. Новгород: ИПФ РАН, 2005
4. Пенроуз Р., *Путь к реальности, или Законы, управляющие Вселенной. Полный путеводитель*, пер. С англ., Москва – Ижевск, 2007
5. Dugas R., *A History of Mechanics*, Neuchatel, Éditions du Griffon, 1955