Лекция 9. Метод конечных элементов для задач теории упругости.

Задачи теории упругости решаются одним из двух известных методов. Первый подразумевает решение дифференциальных уравнений вместе с краевыми условиями, описывающих процесс. Второй метод – метод минимизации потенциальной энергии, которая представляет собой работу напряжений и внешних нагрузок. Мы будем использовать последний подход.

Если задача решает в перемещениях, то есть на границах задаются их значения, то должна минимизироваться потенциальная энергия системы. Если задача решается в напряжениях, а на границах заданы внешние нагрузки, то минимизируется дополнительная работа системы.

В методе конечных элементов отыскиваются такие узловые значения (перемещения системы), которые минимизируют потенциальную энергию системы. После нахождения перемещений могут быть определены тензоры деформаций и напряжений.

Приведем теорему о потенциальной энергии.

Из всех перемещений, удовлетворяющих кинематическим граничным условиям, стационарное (экстремальное) значение потенциальной энергии доставляют те перемещения, которые удовлетворяют уравнениям равновесия.

Здесь важно понимать, что перемещения должны удовлетворять граничным условиям.

Полная потенциальная энергия системы состоит из двух компонент – потенциальная энергия деформаций и потенциальная энергия массовых и поверхностных сил.

Тогда запишем потенциальную энергию в виде суммы

$$\Pi = \Lambda + W_p,$$

где Λ – энергия деформаций, а W_p – потенциальная энергия внешних нагрузок.

Внешние силы выполняют работу, противоположную по знаку их потенциальной энергии, поэтому $W = -W_p$.

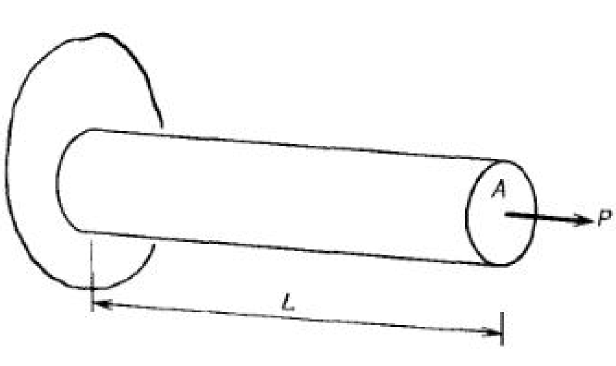
Тогда перепишем выражение для полной потенциальной энергии системы

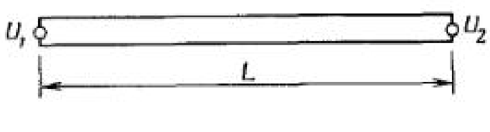
$$\Pi = \Lambda - W.$$

Перейдем к решению задачи об осевом растяжении стержня.

На следующем примере проиллюстрируем применение теоремы о минимуме потенциальной энергии системы. Рассмотрим консольный стержень, один конец которого жестко закреплен, а второй свободен. К свободному концу прикладывается растягивающее осевое усилие. Требуется определить перемещения в стержне.

На рисунке приведена простая схема данной конструкции.





Выберем линейную модель, описывающую перемещения в данной конструкции. Пусть стержень аппроксимируется одним линейным элементом с двумя концевыми узлами. Тогда перемещения в стержне могут быть записаны в следующем виде

$$u = N_1 U_1 + N_2 U_2.$$

На закрепленном конце перемещение равняется нулю, следовательно, $U_1 = 0$ и $u = N_2 U_2 = \frac{x}{L} U_2$.

Потенциальная энергия стержня определяется следующим выражением

$$\Pi = \int_V \frac{\sigma_{xx}\varepsilon_{xx}}{2} dV - PU_2.$$

Первое слагаемое – потенциальная энергия деформации стержня, второе – работа приложенной силы.

Напряжение связано с деформациями законом Гука $\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}$. Тогда перепишем выражение для потенциальной энергии

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_V E\varepsilon_{xx}^2 dV - PU_2.$$

Если принять во внимание постоянство поперечного сечения стержня по его длине, то $dV = Adx$, где A – площадь поперечного сечения, получим

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^L E\varepsilon_{xx}^2 dx - PU_2.$$

Деформация и перемещение связаны соотношением $\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx}$. Тогда с учетом выражения для перемещения получим $\varepsilon_{xx} = \frac{U_2}{L}$. Подставим это выражение в формулу для потенциальной энергии системы

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^L E\frac{U_2^2}{L^2} dx - PU_2 = \frac{AE}{2L}U_2^2 - PU_2.$$

Минимизация потенциальной энергии дает уравнение для нахождения узлового перемещения.

$$\frac{d\Pi}{dU_2} = \frac{AE}{L}U_2 - P = 0.$$

Отсюда получаем $U_2 = \frac{PL}{AE}$.

Получившееся выражение точно совпадает с теоретическим значением перемещения, что достигнуто за счет линейности как модели, так и самой задачи.

Самостоятельно вывести систему уравнений для нахождения перемещений изображенной на рисунке двухэлементной конструкции, нагруженной осевой силой.