Лекция 7. Решение некоторых краевых задач методом конечных элементов.

На прошлой лекции мы начали рассматривать функционал $\int_V \frac{1}{2}\left[K_{xx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + K_{yy}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + K_{zz}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 - 2Q\varphi\right]dV$, который достигает своего минимального значения, если удовлетворяется уравнение $\left[\frac{\partial F}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_z}\right)\right] = 0$. Подсчитаем производные и подставим их в уравнение.

$$\frac{\partial F}{\partial\varphi} = -2Q,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2K_{xx}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = 2K_{xx}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2K_{yy}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = 2K_{yy}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(2K_{zz}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = 2K_{zz}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Тогда получим окончательный вид уравнения

$$Q + K_{xx}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + K_{yy}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + K_{zz}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Это уравнение является уравнением задач теории поля.

Перейдем к рассмотрению примера о переносе тепла в стержне.

Уравнение (5) из прошлой лекции №6 является основным, на основании которого мы должны получить распределение температуры в стержне. Функционал из (4) минимизируется на множестве функций элементов. Эти функции определяются на своих элементах и выражаются через узловые значения. Узловые значения являются неизвестными, а функционал минимизируется по этим неизвестным величинам.

Начнем реализацию метода конечных элементов, для чего определим подобласти и узловые точки. Разобьем стержень на два элемента (линейных). Тогда обозначим узловые значения как T_1, T_2, T_3. Температуру внутри каждого элемента можно определить по следующим формулам

$$\begin{aligned} T^{(1)} &= N_1^{(1)}T_1 + N_2^{(1)}T_2, \\ T^{(2)} &= N_2^{(2)}T_2 + N_3^{(2)}T_3. \end{aligned} \qquad (7)$$

Функции формы определяются соотношениями

$$N_i^{()} = \frac{X_j - x}{L^{()}},\ N_j^{()} = \frac{x - X_i}{L^{()}}.$$

В рассматриваемом примере функционал принимает следующий вид

$$\chi = \int_V \frac{K_{xx}}{2}\left(\frac{dT(x)}{dx}\right)^2 dV + \int_{S_1} qT(x)dS + \int_{S_2}\frac{1}{2}h\left(T(x) - T_\infty\right)^2 dS, \qquad (8)$$

где S_1, S_2 – площади торцевых поверхностей, на которых задаются q, h.

Числовое значения функционала χ получается тогда, когда в него подставляются температура $T(x)$ и вычисляются соответствующие интегралы.

Вычислим сначала поверхностные интегралы, начнем с того, в который включена q.

$$\int_{S_1} qT(x)dS = qT_1 \int_{S_1} dS = qT_1 A_1 \ ,$$

где A_1 – площадь поперечного сечения, которая соответствует первому узлу. В точках этого сечения $T(x)$ постоянна и равна T_1. Далее рассмотрим второй поверхностный интеграл, в которых входит коэффициент теплообмена h.

$$\int_{S_2} \frac{1}{2} h(T(x) - T_\infty)^2 dS = \frac{h}{2}(T_3 - T_\infty)^2 \int_{S_2} dS = \frac{hA_3(T_3 - T_\infty)^2}{2}.$$

Объемный интеграл в функционале содержит производную по координате от температуры, найдем эту производную для каждого из двух элементов.

$$\frac{dT^{(1)}}{dx} = \frac{1}{L^{(1)}}(-T_1 + T_2),$$

$$\frac{dT^{(2)}}{dx} = \frac{1}{L^{(2)}}(-T_2 + T_3).$$

При вычислении объемного интеграла его нужно разбить на два – по каждому из двух элементов, так как производная $\dfrac{dT}{dx}$ не является непрерывной по общему объему. При вычислении интеграла будем предполагать, что каждый элемент имеет постоянную площадь поперечного сечения, поэтому $dV = A^{(e)}dx.$ Тогда интеграл примет вид

$$\int_V \frac{K_{xx}}{2}\left(\frac{dT(x)}{dx}\right)^2 dV = \frac{K_{xx}^{(1)} A^{(1)}}{2L^{(1)}}(T_1 + T_2)^2 + \frac{K_{xx}^{(2)} A^{(2)}}{2L^{(2)}}(T_3 - T_2)^2.$$

Такое представление интеграла в виде суммы двух интегралов, каждый из которых вычисляется по своему элементу, позволяет задавать различные свойства материалов на каждом элементе. Запишем окончательное значение функционала, получив его сложением вычисленных интегралов.

$$\chi = \frac{C^{(1)}}{2}\left(T_1^2 - 2T_1T_2 + T_2^2\right) + \frac{C^{(2)}}{2}\left(T_2^2 - 2T_2T_3 + T_3^2\right) + qA_1T_1 + \frac{hA_3}{2}\left(T_3^2 - 2T_3T_\infty + T_\infty^2\right),$$

где $C^{(1)} = \dfrac{A^{(1)}K_{xx}^{(1)}}{L^{(1)}},\ C^{(2)} = \dfrac{A^{(2)}K_{xx}^{(2)}}{L^{(2)}}.$

Искомые узловые значения температуры T_1, T_2, T_3 – это такие значения, которые доставляют минимум функционалу χ. Найдем эти значения

$$\frac{\partial\chi}{\partial T_1} = C^{(1)}T_1 - C^{(1)}T_2 + qA_1 = 0,$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial T_2} = -C^{(1)}T_1 + \left(C^{(1)} + C^{(2)}\right)T_2 - C^{(2)}T_3 = 0,$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial T_3} = -C^{(2)}T_2 + \left(C^{(2)} - hA_3\right)T_3 - hA_3T_\infty = 0.$$

Запишем эти уравнения в матричной форме

$$\begin{bmatrix} C^{(1)} & -C^{(1)} & - \\ -C^{(1)} & \left(C^{(1)} + C^{(2)}\right) & -C^{(2)} \\ 0 & -C^{(2)} & \left(C^{(2)} + hA_3\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -qA_1 \\ 0 \\ hA_3T_\infty \end{Bmatrix} \text{ или } [K]\{T\} = \{F\}.$$

Матрица коэффициентов $[K]$ называется матрицей жесткости, в данном примере ее лучше назвать матрицей теплопроводности, так как решается задача о переносе тепла в стержне. Вектор-столбец $\{F\}$ – вектор нагрузки.

На последнем шаге нужно задать числовые значения физических параметров стержня и найти числовые значения температуры в узлах.

Зададим следующие параметры задачи

$K_{xx} = 75\,{}^{\text{Вт}}\!/_{\text{см}\cdot{}^\circ\text{C}}$,

$h = 10\,{}^{\text{Вт}}\!/_{\text{см}\cdot{}^\circ\text{C}}$,

$A = \pi\,\text{см}^2$,

$L = 7.5\ \text{см}^2$,

$q = \text{-}150\,{}^{\text{Вт}}\!/_{\text{см}^2}$,

$T_\infty = -40\,{}^\circ C$.

Самостоятельно запишите и решите получившуюся систему трех алгебраических неоднородных уравнений относительно узловых значений температуры.