Лекция 6. Решение некоторых краевых задач методом конечных элементов.

Ранее мы решали задачу об аппроксимации непрерывной функции на отдельном конечном элементе. Потом мы показали, каким образом конечные элементы объединяются и покрывают конечную область. Множество кусочно-непрерывных функций определялось через узловые значения. Однако, конечная цель здесь состоит в том, чтобы вывести соотношения для определения значений искомой функции в узлах. Эти узловые значения должны быть такими, чтобы уравнения для элементов как можно точнее аппроксимировали искомый параметр или функцию.

Как только появился метод конечных элементов, узловые значения получались в результате минимизации некоторой интегральной величины или функционала, связанного с физической постановкой задачи. Для задач механики деформируемого твердого тела это функционал представлял потенциал энергию системы. В результате процесса минимизации узловые значения получались из решения системы алгебраических уравнений.

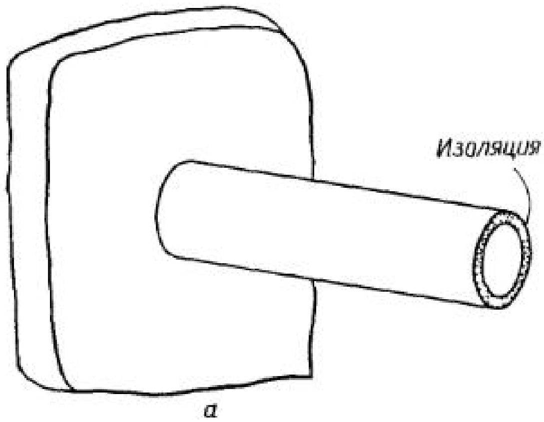
В задачах теории поля минимизируется функционал, который обладает таким свойством, что минимизирующая его функция, будет удовлетворять не только исходные дифференциальные уравнения, но и граничные условия. Позже система уравнений, решение которой давало искомые узловые значения, получалась при использовании таких методов, как метод Галеркина и др.

В данной лекции рассмотрим процесс вывода уравнений для метода конечных элементов. Будем основываться на минимизации некоторой интегральной величины. Сначала проведем анализ небольшого примера, иллюстрирующего задачу теории поля. Далее покажем, что минимизация может быть завершена до момента вычисления интеграла по конечным элементам.

Сначала рассмотрим небольшой пример о переносе тепла в стержне.

Постановка задачи

Рассматривается закрепленный на одном конце стержень, второй конец свободен. Боковая поверхность теплоизолирована. Со стороны закрепленного конца к стержню подводится тепловой поток



а

б

На свободном конце стержня происходит теплообмен с окружающей средой. Коэффициент теплообмена h, температура окружающей среды T_∞.

Дифференциальное уравнение, описывающее распределение температуры внутри стержня, имеет следующий вид

$$K_{xx}\frac{d^2T}{dx^2}=0. \qquad (1)$$

Граничные условия запишутся в следующем виде

при $x=0$ $K_{xx}\dfrac{dT}{dx}+q=0.$ (2)

при $x=L$ $K_{xx}\dfrac{dT}{dx}+h(T-T_\infty)=0,$ (3)

где K_{xx} – коэффициент теплопроводности. Тепловой поток q является положительным, если тепло отводится от стержня.

Рассмотрим вариационный подход к решению этой задачи о переносе тепла. Вариационное исчисление дает, что минимизация функционала

$$\chi=\int_V\frac{K_{xx}}{2}\left(\frac{dT}{dx}\right)^2dV+\int_S\left[qT+\frac{1}{2}h(T-T_\infty)^2\right]dS \qquad (4)$$

требует, чтобы дифференциальное уравнение

$$K_{xx}\frac{d^2T}{dx^2}=0 \qquad (5)$$

удовлетворялось, а также выполнялись граничные условия

$$K_{xx}\frac{dT}{dx}+h(T-T_\infty)=0. \qquad (6)$$

Эти выражения совпадают с исходным уравнением переноса тепла и граничным условием на свободном конце. Любое температурное поле, которое минимизирует функционал χ, будет являться решением исходной поставленной задачи. Оба граничные условия из постановки задачи будут выполняться, так как поверхностный интеграл в функционале разбивается на два по каждой из торцевых поверхностей.

Покажем, что для минимизации этого функционала необходимо выполнение озвученных выше условий (5), (6).

Вариационное исчисление занимается отысканием стационарных значений функционалов. Функционал – интеграл, принимающий числовое значение при подстановке в него конкретной функции. Например, если подставить в интеграл $I=\int_a^b F(x)dx$ конкретную функцию $F(x)$, то получим числовое значение.

Задача вариационного исчисления – отыскание такой $F(x)$, бесконечно малое изменение которой $\delta F(x)$ не изменит значение функционала *I*.

Пусть имеется функционал $I=\int_a^b F(x,\varphi(x),\varphi_x(x))dx$, где x – независимая переменная, а φ,φ_x – функция от x и ее производная. Варьирование функционала I вызывается с помощью изменения функции $F(x)$:

$$\delta I=\int_a^b\delta F(x,\varphi(x),\varphi_x(x))dx=\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi}\delta\varphi+\frac{\partial F}{\partial\varphi_x}\delta\varphi_x\right)dx,$$

заметим, что $\delta\varphi_x=\dfrac{d}{dx}(\delta\varphi)$. Проинтегрируем второе слагаемое в интеграле, получим

$$\delta I=\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_x}\right)\right)\delta\varphi dx+\frac{\partial F}{\partial\varphi_x}\delta\varphi\Bigg|_a^b.$$

Стационарное значение функционала достигается в случае, если $\delta I=0$. Эта величина равна нулю, если равен нулю интеграл, который входит в это выражение.

Очевидно, что $\varphi(a) = const,\ \varphi(b) = const,$ тогда $\delta\varphi(a) = 0,\ \delta\varphi(b) = 0.$ Также $\frac{\partial F}{\partial \varphi_x}(a) = \frac{\partial F}{\partial \varphi_x}(b) = 0.$

Вариация $\delta\varphi$ задается произвольным образом на отрезке $[a; b]$, тогда должно выполняться следующее выражение

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_x}\right) = 0.$$

Это выражение обеспечивает равенство нулю записанного выше интеграла.

Пусть функционал имеет несколько независимых переменных.

$$I = \int_V F(x,\ y,\ z,\ \varphi,\ \varphi_x,\ \varphi_y,\ \varphi_z)dV.$$

Вариация функционала запишется следующим образом

$$\delta I = \int_V \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\delta\varphi + \frac{\partial F}{\partial \varphi_x}\delta\varphi_x + \frac{\partial F}{\partial \varphi_y}\delta\varphi_y + \frac{\partial F}{\partial \varphi_z}\delta\varphi_z\right)dV.$$

Если вспомнить, что $\delta\varphi_x = \frac{d}{dx}(\delta\varphi)$, то получим

$$\delta I = \int_V \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\delta\varphi + \frac{\partial F}{\partial \varphi_x}\frac{\partial}{\partial x}(\delta\varphi) + \frac{\partial F}{\partial \varphi_y}\frac{\partial}{\partial y}(\delta\varphi) + \frac{\partial F}{\partial \varphi_z}\frac{\partial}{\partial z}(\delta\varphi)\right)dV.$$

Проинтегрируем по частям второе слагаемое в интеграле и применим формулу Гаусса, получим

$$\int_V \frac{\partial F}{\partial \varphi_x}\frac{\partial}{\partial x}(\delta\varphi)dV = \int_V \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_x}\delta\varphi\right)dV - \int_V \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_x}\right)\delta\varphi\, dV$$

и

$$\int_V \frac{\partial F}{\partial \varphi_x}\frac{\partial}{\partial x}(\delta\varphi)dV = \int_S l_x \frac{\partial F}{\partial \varphi_x}\delta\varphi\, dS - \int_V \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_x}\right)\delta\varphi\, dV,$$

где l_x – направляющий косинус нормали к поверхности с осью Ox. Аналогичным образом преобразуем другие слагаемые.

$$\delta I = \int_V \left[\frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_z}\right)\right]\delta\varphi\, dV + \int_S \left[l_x \frac{\partial F}{\partial \varphi_x} + l_y \frac{\partial F}{\partial \varphi_y} + l_z \frac{\partial F}{\partial \varphi_z}\right]\delta\varphi\, dS.$$

Стационарное значение функционала получится только в том случае, если выражения в скобках в интеграле, записанном выше, будут равны нулю. Эти требования приводят к дифференциальным уравнениям и граничным условиям для функции F.

Если рассмотреть функционал вида

$$\int_V \frac{1}{2}\left[K_{xx}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + K_{yy}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + K_{zz}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 - 2Q\varphi\right]dV,$$

то он достигает своего минимального значения, если искомая функция будет удовлетворять следующему дифференциальному уравнению.

$\left[\frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_z}\right)\right] = 0.$ Производные в уравнении могут быть получены дифференцированием функционала, представленного выше.