Лекция 5. Включение отдельного конечного элемента в исследуемую область.

Ранее мы обсуждали вопросы, касающиеся интерполяционных многочленов для отдельных элементов. При этом мы не фиксировали значения координат узлов, поэтому ориентация элементов была произвольной. Это является одним из достоинств МКЭ.

Попробуем вывести интерполяционные соотношения для каждого элемента через глобальные координаты и узловые значения.

Рассмотрим скалярные величины, далее обобщим результаты на случай векторных величин.

Скалярные величины

Раньше нами был получен интерполяционный полином для скалярной величины в виде

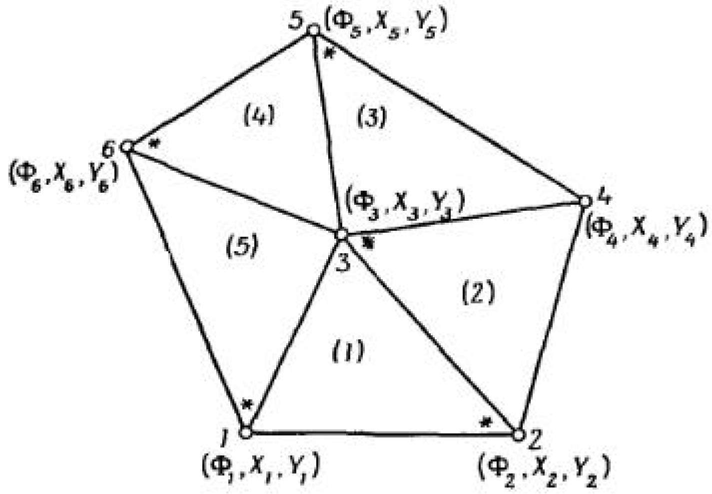
$$\varphi = [N]\{\phi\}. \qquad (1)$$

В соотношение входят функции формы в виде матрицы $[N]$ и узловые значения в виде вектор-столбца $\{\phi\}$.

Проиллюстрируем на следующем примере технику включения отдельного элемента в область.

Будем рассматривать пятиэлементную конфигурацию, пронумеруем узлы от 1 до 6. Узловые значения $\phi_1, ..., \phi_6$ являются глобальными степенями свободы. Узловые координаты (X_β, Y_β), $\beta = 1,...,6$ считаются неизвестными. На рисунке номера элементов указаны в скобках.

Номера узлов элементов обозначаем, как и раньше, через i, j, k. На рисунке узлы под номером i обозначены звездочкой, такая схема более удобна, и скоро мы в этом убедимся.



Запишем равенства для номеров узлов первого элемента $i = 2,\ j = 3,\ k = 1$.

Для других элементов эти равенства примут вид

$2:\ i = 3,\ j = 2,\ k = 4,$

$3:\ i = 6,\ j = 3,\ k = 4,$

$4:\ i = 6,\ j = 3,\ k = 5,$

$5:\ i = 1,\ j = 3,\ k = 6.$

Эти равенства определяют соответствие между индексами элементов и глобальными номерами узлов, таким образом, элементы включаются в область.

Если подставить значения индексов i, j, k в (1), то получим совокупность уравнений для обозначенных выше элементов.

$$
\begin{aligned}
\varphi^{(1)} &= N_2^{(1)}\phi_2 + N_3^{(1)}\phi_3 + N_1^{(1)}\phi_1, \\
\varphi^{(2)} &= N_3^{(2)}\phi_3 + N_2^{(2)}\phi_2 + N_4^{(2)}\phi_4, \\
\varphi^{(3)} &= N_5^{(3)}\phi_5 + N_3^{(3)}\phi_3 + N_4^{(3)}\phi_4, \\
\varphi^{(4)} &= N_6^{(4)}\phi_6 + N_3^{(4)}\phi_3 + N_5^{(4)}\phi_5, \\
\varphi^{(5)} &= N_1^{(5)}\phi_1 + N_3^{(5)}\phi_3 + N_6^{(5)}\phi_6.
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

Функции формы определяются с помощью подстановки числовых значений индексов $i,\ j,\ k$ в уравнения для функций формы. Функция формы $N_k^{(e)}$ в обозначениях $i,\ j,\ k$ можно записать в следующем виде

$$N_k^{(e)} = \frac{1}{2A^{(e)}}\left(a_k^{(e)} + b_k^{(e)}x + c_k^{(e)}y\right),$$

$a_k^{(e)} = X_iY_j - X_jY_i,$

где $b_k^{(e)} = Y_i - Y_j,$

$c_k^{(e)} = X_j - X_i.$

Если рассмотреть пятый элемент и подставить $i = 1,\ j = 3,\ k = 6$, то получим

$$N_6^{(5)} = \frac{1}{2A^{(5)}}\left(a_6^{(5)} + b_6^{(5)}x + c_6^{(5)}y\right),$$

$a_6^{(5)} = X_1Y_3 - X_3Y_1,$

где $b_6^{(5)} = Y_1 - Y_3,$

$c_6^{(5)} = X_3 - X_1.$

Совершено очевидно, что, например, $N_6^{(4)}$ и $N_6^{(5)}$ – совершенно разные величины, даже при условии равенства площадей треугольных элементов.

Формулы (2) показывают, как конечные элементы объединяются и покрывают исследуемую область, а интерполяционные функции могут быть выражены через значения в глобальных узлах, имеющих глобальные координаты. Последние вводят вместо произвольных координат $i,\ j,\ k$, рассматриваемых ранее.

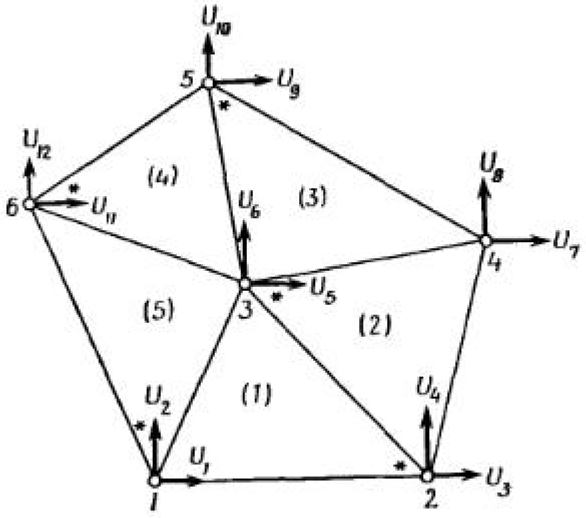
В дальнейшем будем использовать расширенную форму системы (2), которая имеет следующий вид.

$$
\begin{aligned}
\varphi^{(1)} &= N_1^{(1)}\phi_1 + N_2^{(1)}\phi_2 + N_3^{(1)}\phi_3 + 0\phi_4 + 0\phi_5 + 0\phi_6, \\
\varphi^{(2)} &= 0\phi_1 + N_2^{(2)}\phi_2 + N_3^{(2)}\phi_3 + N_4^{(2)}\phi_4 + 0\phi_5 + 0\phi_6, \\
\varphi^{(3)} &= 0\phi_1 + 0\phi_2 + N_3^{(3)}\phi_3 + N_4^{(3)}\phi_4 + N_5^{(3)}\phi_5 + 0\phi_6 \\
\varphi^{(4)} &= 0\phi_1 + 0\phi_2 + N_3^{(4)}\phi_3 + 0\phi_4 + N_5^{(4)}\phi_5 + N_6^{(4)}\phi_6, \\
\varphi^{(5)} &= N_1^{(5)}\phi_1 + 0\phi_2 + N_3^{(5)}\phi_3 + 0\phi_4 + 0\phi_5 + N_6^{(5)}\phi_6.
\end{aligned}
$$

Эта форма используется тогда, когда требуется провести процесс минимизации, связанный с дифференцированием матриц элементов. Сокращенная же форма обычно применяется при реализации метода конечных элементов на компьютере.

Векторные величины

Для векторных величин справедливы аналогичные рассуждения, которые использовались в предыдущем параграфе. На рисунке обозначена область, разбитая на 5 элементов.



Для удобства приведем общее уравнение для элемента

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{2i-1} \\ U_{2i} \\ U_{2j-1} \\ U_{2j} \\ U_{2k-1} \\ U_{2k} \end{Bmatrix}.$$

Соответствие между глобальными узлами и узлами выбранного элемента $i,\ j,\ k$ записывается в том же виде, что для скалярных величин, если только использовать те же самые узлы. Если рассмотреть четвертый элемент, то $i = 6,\ j = 3,\ k = 5$ и мы получим

$$\begin{Bmatrix} u^{(4)} \\ v^{(4)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_6 & 0 & N_3 & 0 & N_5 & 0 \\ 0 & N_6 & 0 & N_3 & 0 & N_5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{11} \\ U_{12} \\ U_5 \\ U_6 \\ U_9 \\ U_{10} \end{Bmatrix}. \qquad (3)$$

Это сокращенная запись, расширенная же будет включать все 12 узловых значений $U_1, ..., U_{12}$.

Сделаем некоторые выводы. Изложенные здесь идеи просты и понятны. Они позволяют закрепить элементы в исследуемой области и аппроксимировать искомую величину кусочно-непрерывными функциями.