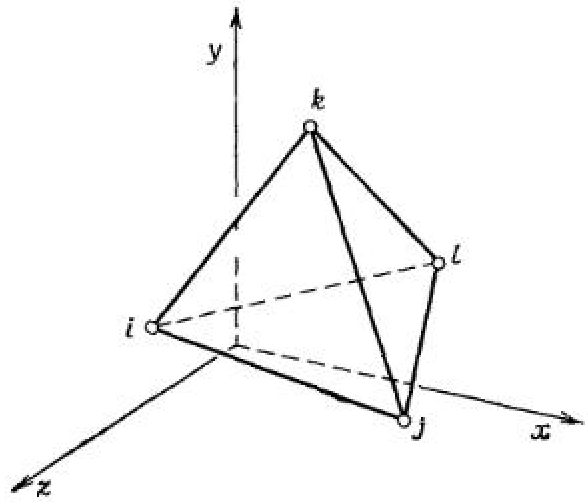
Лекция 4. МКЭ. Трехмерный симплекс элемент.

Трехмерный симплекс-элемент – тетраэдр, имеющий 4 вершины и 4 узла, соответственно. Узлы обозначаются индексами i, j, k и l. Обход узлов осуществляют в том же порядке, что они записаны, против часовой стрелки. Узел l располагают в вершине, которая находится не в плоскости узлов i, j, k. На следующем рисунке представлен трехмерный симплекс-элемент.



Интерполяционный многочлен для такого элемента записывается в виде

$\varphi = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z$.

Неизвестные коэффициенты определяются из условий в узлах

$$\begin{aligned} \phi_i &= a_1 + a_2 X_i + a_3 Y_i + a_4 Z_i \\ \phi_j &= a_1 + a_2 X_j + a_3 Y_j + a_4 Z_j \\ \phi_k &= a_1 + a_2 X_k + a_3 Y_k + a_4 Z_k \\ \phi_l &= a_1 + a_2 X_l + a_3 Y_l + a_4 Z_l \end{aligned}.$$

Представленную выше систему можно решить, например, по правилу Крамера. В этом случае придется вычислять пять определителей. Можно записать систему в матричной форме, затем обратить матрицу коэффициентов и получить решение системы в следующем виде

$$\{a\} = [C]^{-1}\{\phi\},$$

где $\{a\} = \{a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4\}$, $[C] = \begin{bmatrix} 1 & X_i & Y_i & Z_i \\ 1 & X_j & Y_j & Z_j \\ 1 & X_k & Y_k & Z_k \\ 1 & X_l & Y_l & Z_l \end{bmatrix}$.

Определитель матрицы C равняется шести объемам тетраэдра.

Пример

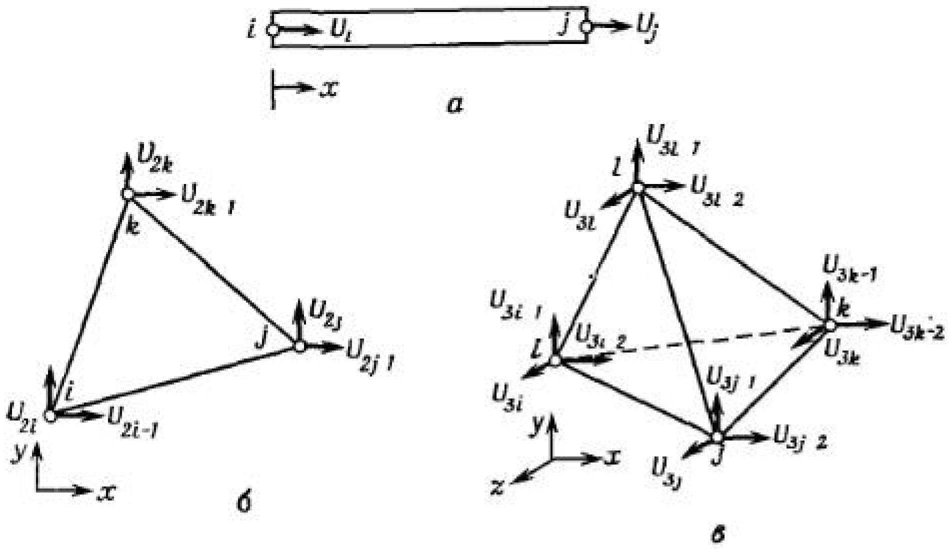
Даны координаты вершин тетраэдра. Требуется найти функции формы, используя описанную выше процедуру нахождения обратной матрицы.

$i(1, 2, 1)$, $j(0, 0, 0)$, $k(2, 0, 0)$, $l(1, 0, 3)$.

Интерполирование векторных величин

В предыдущих лекциях рассматривались скалярные величины. Векторная величина помимо длины имеет еще и направление, поэтому в таком случае ее нужно рассматривать в виде ее компонент. В этой ситуации в каждом узле уже будет не одна степень свободы, а больше. Все зависит от размерности задачи.

На следующем рисунке представлены обозначения векторных величин, используемые в симплекс - элементах.



Нижние индексы, как правило, упорядочиваются по направлениям осей координат x, y, z. Наименьшее значение индекса соответствует оси Ox.

В одномерном случае представления для векторной и скалярной величин совпадают – в каждом узле неизвестной является только одна величина.

$$u = N_i U_i + N_j U_j = \begin{bmatrix} N_i & N_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix},$$

где u – перемещение вдоль оси одномерного элемента.

Если рассматривать плоский случай и треугольный элемент, то запишем выражения для горизонтальной и вертикальной компонент перемещения

$$\begin{aligned} u &= N_i U_{2i-1} + N_j U_{2j-1} + N_k U_{2k-1} \\ v &= N_i U_{2i} + N_j U_{2j} + N_k U_{2k} \end{aligned}.$$

Перепишем эти равенства с учетом всех узловых значений перемещения

$$\begin{aligned} u &= N_i U_{2i-1} + 0U_{2i} + N_j U_{2j-1} + 0U_{2j} + N_k U_{2k-1} + 0U_{2k} \\ v &= 0U_{2i-1} + N_i U_{2i} + 0U_{2j-1} + N_j U_{2j} + 0U_{2k-1} + N_k U_{2k} \end{aligned}.$$

Запишем эти выражения в матричной форме

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{2i-1} \\ U_{2i} \\ U_{2j-1} \\ U_{2j} \\ U_{2k-1} \\ U_{2k} \end{Bmatrix}.$$

Предлагается записать данную формулу для трехмерного случая **самостоятельно**.

Локальная система координат

Для того, чтобы получить систему уравнений для определения узловых значений искомых величин, придется интегрировать функции формы и их частные производные по площади элемента. Эта операция упростится, если записать интерполяционные соотношения в локальной системе координат, связанной с элементом.

Для записи интерполяционных соотношений в местной системе координат нужно будет преобразовать уравнения, полученные в глобальной системе.

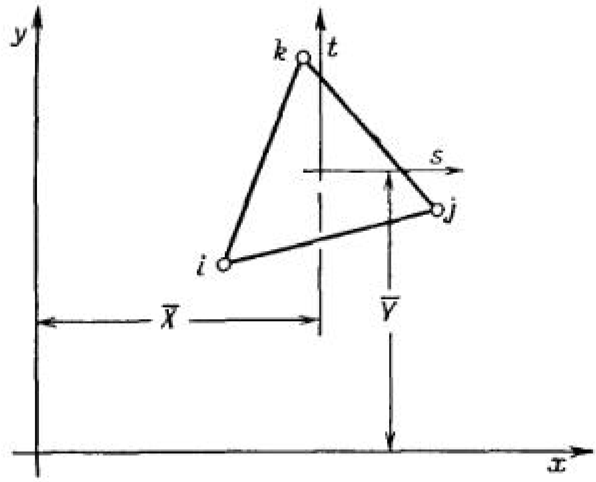
Пусть имеется треугольный элемент, запишем выражение для скалярной величины через функции формы

$\varphi = N_i \phi_i + N_j \phi_j + N_k \phi_k$.

Формулы преобразования координат будут иметь вид

$x = \overline{X} + s$

$y = \overline{Y} + t,$



где $\overline{X}, \overline{Y}$ являются координатами центра треугольника

$$\overline{X} = \frac{X_i + X_j + X_k}{3}$$

$$\overline{Y} = \frac{Y_i + Y_j + Y_k}{3}.$$

Функция формы N_i имеет следующий вид в глобальной системе координат

$$N_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y).$$

Заменим в этом выражении координаты x, y на их представления в локальной системе, тогда

$$N_i = \frac{1}{2A}\left(a_i + b_i\left(\overline{X} + s\right) + c_i\left(\overline{Y} + t\right)\right).$$

Перепишем это выражение в виде

$$N_i = \frac{1}{2A}\left(\left(a_i + b_i \overline{X} + c_i \overline{Y}\right) + b_i s + c_i t\right).$$

Из этой формулы видно, что b_i, c_i также являются множителями перед независимыми переменными. Однако константа a_i поменялась. Если вспомнить выражения для a_i, b_i, c_i, а также формулы для $\overline{X}, \overline{Y}$, то можно показать, что $\left(a_i + b_i \overline{X} + c_i \overline{Y}\right) = \frac{2A}{3}$. (**Показать самостоятельно**).

Следовательно, функция формы в локальной системе координат примет вид

$$N_i = \frac{1}{2A}\left(\frac{2A}{3} + \left(Y_j - Y_k\right)s + \left(X_k - X_j\right)t\right).$$

Аналогичным образом получаются формулы и для других функций формы

$$N_j = \frac{1}{2A}\left(\frac{2A}{3} + (Y_i - Y_k)s + (X_k - X_i)t\right),$$

$$N_k = \frac{1}{2A}\left(\frac{2A}{3} + (Y_i - Y_j)s + (X_j - X_i)t\right).$$

Интеграл от функции, которая задана в глобальной системе координат, в местной системе вычисляется следующим образом

$$\int_R f(x,\ y)dxdy = \int_{R^8} f(x(s,\ t),\ y(s,\ t))|J|dsdt,$$

где R, R^* – старая и новая области интегрирования соответственно, $|J|$ – значение определителя преобразования систем координат, взятое по модулю. Это значение равно отношению площадей в двух системах координат. В нашем случае, так как системы прямоугольные, и их масштабы совпадают, то $|J| = 1$. Более того, площади элемента совпадают. Тогда получим

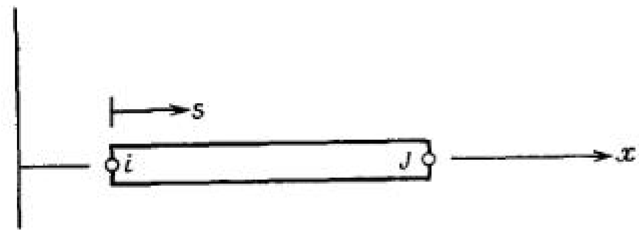
$$\int_R f(x,\ y)dxdy = \int_{R^8} f(x(s,\ t),\ y(s,\ t))dsdt.$$

В левом интеграле функция $f(x,\ y)$ является функцией формы элемента в глобальной системе координат, а $f(x(s,\ t),\ y(s,\ t))$ – функция формы элемента в локальной системе.

Одномерный элемент

При использовании одномерного элемента большой необходимости в местной системе координат нет, так как интерполяционное уравнение достаточно легко интегрируется. Однако, процесс интегрирования можно упростить, если поместить начало локальной системы в *i*-ом узле. Тогда

$$x = X_i + s.$$



Получаем выражения для функций формы

$$N_i = \frac{X_j - X_i - s}{L} = \frac{L - s}{L} = 1 - \frac{s}{L},$$

$$N_j = \frac{X_i + s - X_i}{L} = \frac{s}{L}.$$

Запишем соотношение, определяющее элемент

$$\varphi = \left(1 - \frac{s}{L}\right)\phi_i + \left(\frac{s}{L}\right)\phi_j.$$