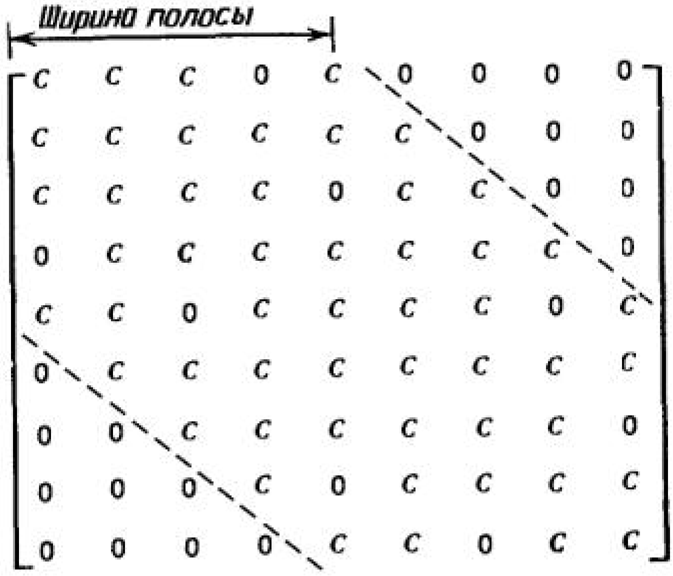
Лекция 3. Нумерация узлов. Симплекс элементы.

Нумерация узлов

Если бы нумерация узлов не влияла на время расчетов, то она была бы тривиальной задачей. Применение МКЭ приводит к тому, что приходится решать систему линейных алгебраических уравнений, в которой многие коэффициенты равны нулю. Оказывается, что все ненулевые коэффициенты и некоторые нулевые обнаруживаются между двумя линиями, которые параллельны главной диагонали.

Расстояние между этими полосами и главной диагональю называется шириной полосы матрицы. Вне этой полосы все коэффициенты равны нулю и их не нужно хранить в памяти компьютера. Если вычислительный алгоритм написал правильно, то программа использует в вычислениях только те коэффициенты, которые оказываются внутри описанной выше полосы. Если ширину полосы уменьшить, то время вычислений уменьшится.



Приведем формулу для вычисления ширины полосы B.

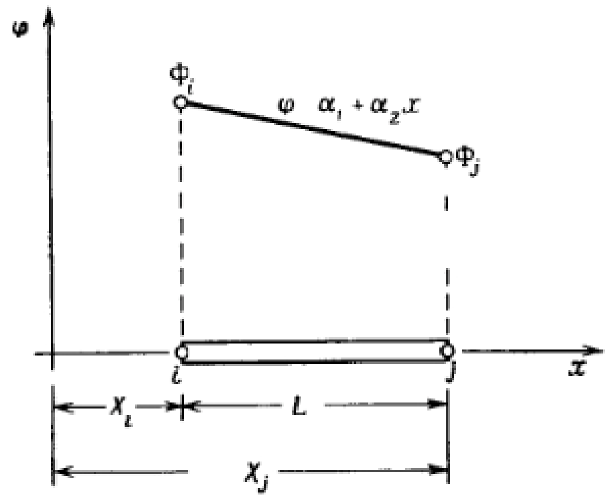
$$B = (R+1)Q,$$

где R – максимальная по элементам величина наибольшей разности между номерами узлов в отдельном элементе, Q – число степеней свободы в каждом узле. Если требуется минимизировать B, то придется минимизировать величину R. Последнее можно осуществить последовательной нумерацией узлов при движении в направлении минимального размера исследуемого тела. Оптимальная нумерация узлов может сократить время машинного расчета на 50%.

Симплекс элементы: одномерный элемент

Конечные элементы можно классифицировать в соответствии с порядком функций этих элементов. Рассматриваются следующие типы элементов: симплекс, комплекс и мультиплекс. Симплекс элементы описываются многочленом первой степени с двумя константами. Число констант в полиноме на единицу больше размерности пространства.

Одномерный симплекс элемент – отрезок некоторой длины L, ограниченный двумя узлами на каждом из своих концов. Узлы будем обозначать индексами i, j, а значения в узлах ϕ_i, ϕ_j соответственно. Начало системы отсчета будем располагать вне элемента.



Тогда полином для скалярной величины можно записать в виде

$$\varphi = a_1 + x a_2 . \qquad (1)$$

Константы a_1, a_2 определяются из условий в узлах элемента

$\varphi = \phi_i$ при $x = X_i$

$\varphi = \phi_j$ при $x = X_j$.

Получаем систему уравнений для нахождения констант

$$a_1 + X_i a_2 = \phi_i$$

$$a_1 + X_j a_2 = \phi_j$$

Решение системы дает

$$a_1 = \frac{\phi_i X_j - \phi_j X_i}{L}$$

$$a_2 = \frac{\phi_j - \phi_i}{L}.$$

Если подставить найденные коэффициенты в выражение (1), получим

$$\varphi = \left(\frac{\phi_i X_j - \phi_j X_i}{L}\right) + \left(\frac{\phi_j - \phi_i}{L}\right) x,$$

которое перепишем в следуем виде

$$\varphi = \frac{X_j - x}{L}\phi_i + \frac{x - X_i}{L}\phi_j . \qquad (2)$$

Линейные функции, зависящие от *x*, называют функциями формы. Их обозначают через *N*. Каждая из этих функций снабжается нижним индексом, обозначающим ее принадлежность определенному узлу. Введем функции формы

$$N_i = \frac{X_j - x}{L}, \; N_j = \frac{x - X_i}{L}.$$

Тогда запишем соотношение (2) в следующем виде

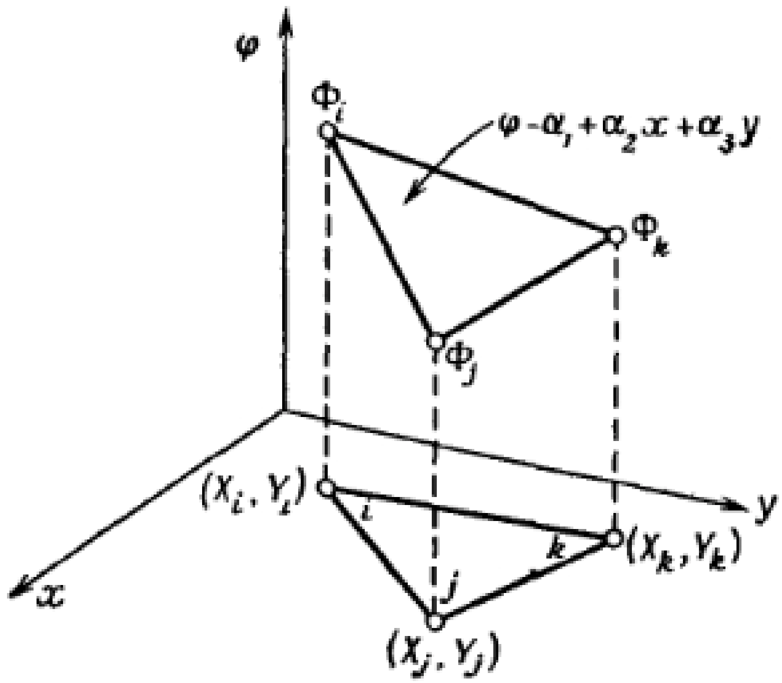
$$\varphi = N_i \phi_i + N_j \phi_j = [N]\{\phi\},$$

где $[N] = \lfloor N_i \;\; N_j \rfloor$ – матричная строка, $\{\phi\} = \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{Bmatrix}$ – вектор столбец.

Из формул, определяющих $[N] = \lfloor N_i \;\; N_j \rfloor$, видно, что функции формы равны единице в одном определенном узле и равны нулю во всех других узлах.

Двумерный симплекс элемент

На рисунке показан двумерный симплекс элемент. Это треугольник, имеющий три прямолинейные стороны и три узла. Будем нумеровать узлы последовательно против часовой стрелки, начиная с произвольного *i*-го узла. Узловые значения будем обозначать через ϕ_i, ϕ_j, ϕ_k, координаты узлов обозначим через (X_i, Y_i), (X_j, Y_j), (X_k, Y_k).



Интерполяционный многочлен имеет вид

$$\varphi = a_1 + a_2 x + a_3 y. \qquad (3)$$

В узлах элемента должны выполняться условия

$\varphi = \phi_i$ при $x = X_i$, $y = Y_i$

$\varphi = \phi_j$ при $x = X_j$, $y = Y_j$

$\varphi = \phi_k$ при $x = X_k$, $y = Y_k$.

При подстановке этих условий в выражение (2) получим систему трех линейных алгебраических уравнений для нахождения неизвестных констант a_1, a_2, a_3.

Решив систему, получим

$$a_1 = \frac{1}{2A}\Big(\big(X_j Y_k - X_k Y_j\big)\phi_i + \big(X_k Y_i - X_i Y_k\big)\phi_j + \big(X_i Y_j - X_j Y_i\big)\phi_k\Big),$$

$$a_2 = \frac{1}{2A}\Big(\big(Y_j - Y_k\big)\phi_i + \big(Y_k - Y_i\big)\phi_j + \big(Y_i - Y_j\big)\phi_k\Big),$$

$$a_3 = \frac{1}{2A}\Big(\big(X_k - X_j\big)\phi_i + \big(X_i - X_k\big)\phi_j + \big(X_j - X_i\big)\phi_k\Big).$$

Символ A обозначает площадь треугольника, которая может быть найдена по формуле

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix}, \qquad (4)$$

которая получается из определения векторного произведения векторов.

Если подставить найденные значения a_1, a_2, a_3 в формулу (3) и преобразовать получившееся выражение для выделения коэффициентов перед узловыми значениями ϕ_i, ϕ_j, ϕ_k, то получим следующее

$$\varphi = N_i\phi_i + N_j\phi_j + N_k\phi_k ,$$

$$N_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y), \quad N_j = \frac{1}{2A}(a_j + b_j x + c_j y), \quad N_k = \frac{1}{2A}(a_k + b_k x + c_k y),$$

где $\begin{cases} a_i = X_j Y_k - X_k Y_j, \\ b_i = Y_j - Y_k, \\ c_i = X_k - X_j. \end{cases}$ $\begin{cases} a_j = X_k Y_i - X_i Y_k, \\ b_j = Y_k - Y_i, \\ c_j = X_i - X_k. \end{cases}$ $\begin{cases} a_k = X_i Y_j - X_j Y_i, \\ b_k = Y_i - Y_j, \\ c_k = X_j - X_i. \end{cases}$

Найдем значение N_i в *i*-ом узле.

$N_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) = \frac{1}{2A}\left(X_j Y_k - X_k Y_j + Y_j X_i - Y_k X_i + X_k Y_i - X_j Y_i\right).$ Выражение в скобке является определителем из формулы (4), поэтому $N_i = 1$.

Самостоятельно проверьте равенство нулю N_i в других узлах.

Рассмотрим примеры.

1. Для решения одномерной задачи распределения тепла в стержне используется одномерный симплекс элемент. Было найдено, что температура в узлах элемента 120 и 90 градусов Цельсия, узлы располагаются на расстояниях 1.5 и 6 см от начала координат. Найти температуру в точке на расстоянии 3 см от начала координат, а также градиент температуры внутри рассматриваемого элемента.
2. Получить соотношение, которое определяет элемент, и определить значение давления внутри элемента в точке B (2; 1.5). Узловые значения $P_i = 40 \, Н/см^2$, $P_j = 30 \, Н/см^2$, $P_k = 50 \, Н/см^2$. Координаты узлов i : (0, 0), j :(4, 0.5), k : (2,5).
3. Определить линию уровня, которая соответствует величине давления в 45 $Н/см^2$, для треугольного элемента в предыдущей задаче.