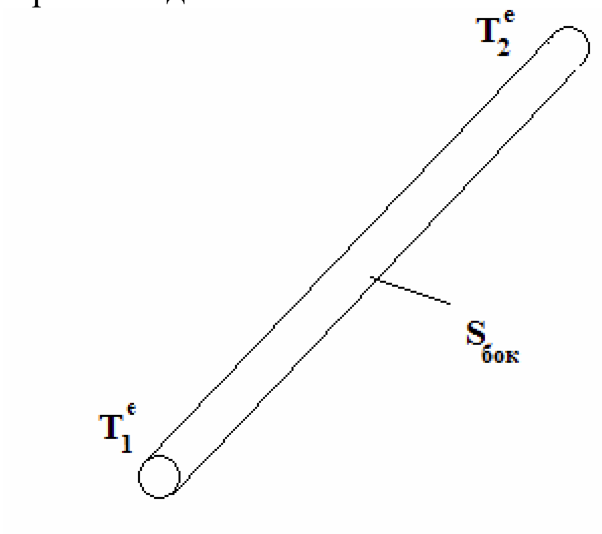
Лекция 2. Применение метода конечных элементов.

Для того, чтобы понять сущность метода конечных элементов, рассмотрим два случая – одномерный перенос тепла в стержне и двумерный перенос тепла.

1. **Одномерный перенос тепла**.

Пусть имеется стержень постоянного поперечного сечения. Разделим его на некоторое количество одинаковых конечных элементов и будем рассматривать один из них.



Каждый элемент имеет длину l и площадь поперечного сечения S. Предположим, что подвод тепла к элементу отсутствует, то есть $q^в = 0$. Будем считать, что на торцах выбранного элемента присутствует тепловой поток q^s, при этом боковая поверхность $s_{бок}$ предполагается теплоизолированной. Направим ось координат вдоль стержня от 1 к 2. Будем считать, что на концах стержня поддерживается постоянная температура T_1^e, T_2^e. При этом вдоль стержня она изменяется по линейному закону $T(x) = a_1 + a_2 x$, где x – координата вдоль оси стержня. Далее получаем, что $T(0) = a_1 = T_1^e$, $T(l) = a_1 + a_2 l = T_2^e$. Из этих выражений следует, что $a_1 = T_1^e$, $a_2 = \dfrac{T_2^e - T_1^e}{l}$. Тогда получим

$$T(x) = T_1^e + \frac{T_2^e - T_1^e}{l} x = \left(1 - \frac{x}{l}\right) T_1^e + \frac{x}{l} T_2^e = N_1(x) T_1^e + N_2(x) T_2^e.$$

Функции N_1, N_2 являются одномерными линейными функциями формы. Для них справедливо, что в узде 1 $N_1 = 1, N_2 = 0$ и наоборот. Более того, они имеют свойство полноты, то есть при любых значениях x выполняется следующее равенство $N_1 + N_2 = 1$.

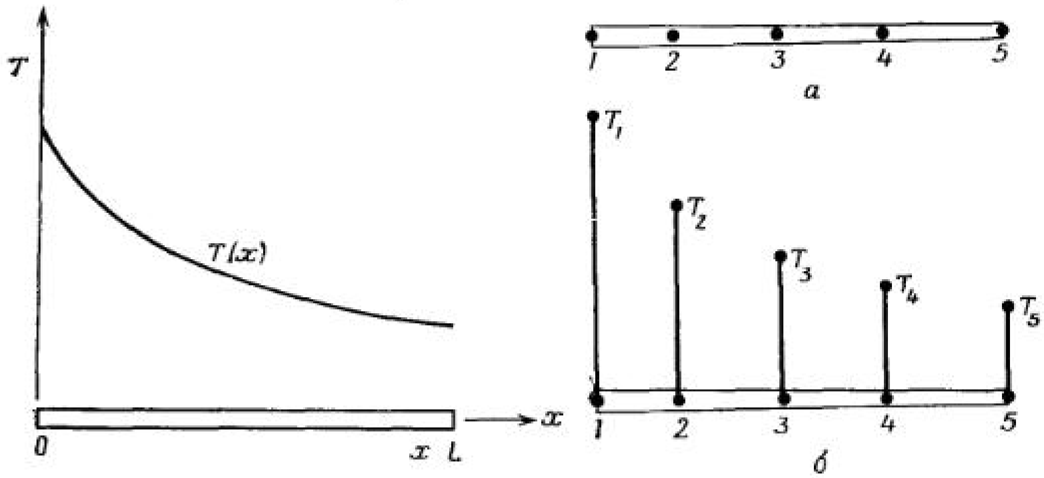
Запишем функции формы в виде матрицы, то есть матрица формы для одномерного линейного элемента в нашем случае примет вид

$$[N]=\left[\left(1-\frac{x}{l}\right)\ \left(\frac{x}{l}\right)\right].$$

Тогда изменение температуры вдоль оси элемента можно записать в виде произведения матрицы на столбец $T(x)=[N]\{T^e\}$, где $\{T^e\}=\begin{Bmatrix} T_1^e \\ T_2^e \end{Bmatrix}$.

2. **Остановимся подробнее на основной концепции МКЭ**.

Пусть непрерывная функция $T(x)$ определена на отрезке OL вдоль оси Ox. Зафиксируем и пронумеруем пять точек на отрезке OL. Эти точки будем называть узловыми, при этом не обязательно, чтобы они располагались на одинаковых расстояниях друг от друга. Очевидно, что для иллюстрации метода достаточно и пяти точек. Считаем, что значения функции $T(x)$ известны в каждой точке. Изобразим эти значения графически на следующем рисунке и обозначим их T_1, T_2, T_3, T_4, T_5.



В данном случае исследуемую область, то есть отрезок OL. можно разбить на элементы несколькими способами. Первый - каждый элемент ограничивается двумя точками, в таком случае получаем 4 элемента, каждый описывается двумя узлами. Второй вариант - разбиение области на два элемента по три узла в каждом. Полином, соответствующий $T(x)$, будет определяться в узлах элемента. Если область разбивается на 4 элемента, то полином будет линейным. На самом деле, две точки однозначно описывают прямую линию, а три – параболу. Окончательно $T(x)$ будет аппроксимироваться четырьмя кусочно-линейными функциями, каждая из них будет определена на своем отдельном элементе.

Во втором случае при разбиении области на два элемента по три узла в каждом даст нам квадратичные функции элемента. И окончательно $T(x)$ будет аппроксимироваться совокупностью двух кусочно непрерывных квадратичных функций. Приближение будет кусочно непрерывным, так как углы наклона графиков могут различаться в среднем (третьем) узле.

Перейдем к рассмотрению общего случая, когда распределение $T(x)$ заранее неизвестно, и требуется найти значения $T(x)$ в некоторых точках отрезка OL.

В этом случае определяются узловые точки, а также значения T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, которые являются переменными. Область разбивают на элементы, на каждом элементе определяют соответствующую функцию. Значения $T(x)$ в узлах «регулируются» таким образом, чтобы обеспечить наилучшее приближение к истинному температурному распределению. Эта регулировка осуществляется посредством минимизации функционала, строящегося на основе дифференциальных уравнений, описывающих процесс. Минимизация функционала сводится к решению системы алгебраических уравнений относительно значения $T(x)$ в узлах.

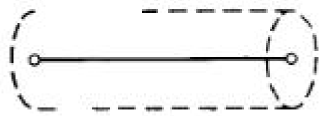
Если рассматривать двумерный случай, то элементы описываются функциями, зависящими от x, y. Как правило, область разбивают на треугольники и четырехугольники. Функции элементов теперь являются плоскими или криволинейными поверхностями. Функция элемента будет плоскостью, если элемент имеет минимальное число узлов (три для треугольника и четыре для четырехугольника). Большее число узлов позволяет описывать элементы с криволинейными ребрами.

Дискретизация области

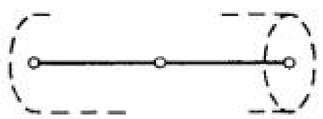
Дискретизация области представляет собой задание числа, размеров и формы подообластей, которые применяются для создания дискретной модели реального объекта.

Простейшим элементов, использующимся при дискретизации области, является одномерный элемент. Обычно он изображается отрезком, тем не менее, он может иметь поперечное сечение. Площадь сечения может меняться по длине элемента. Как правило, такой элемент применяется в одномерных задачах стержневых конструкций, распространения тепла и т.п.

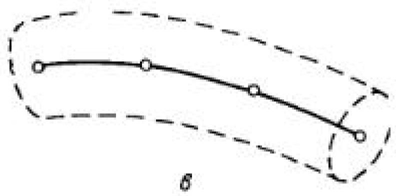
Самый простой одномерный элемент имеет два узла. Одномерные элементы высоких порядков могут иметь три или четыре узла - они описываются квадратичными и кубическими сплайнами. Также такой элемент может быть и криволинейным.



а



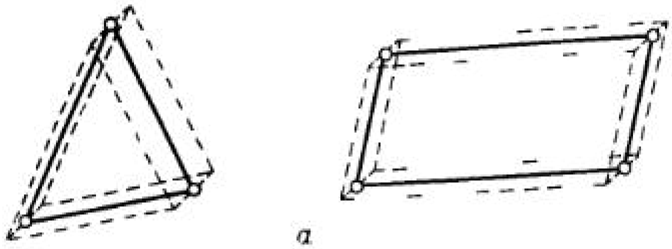
б



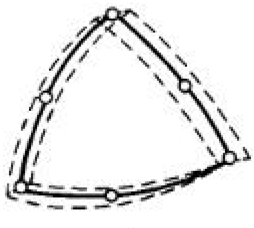
в

Двумерные треугольные и четырехугольные элементы чаще других используются в плоских задачах. Стороны элементов могут быть как прямые, так и кривые линии. Криволинейные границы моделируются добавлением в середины сторон по узлу.

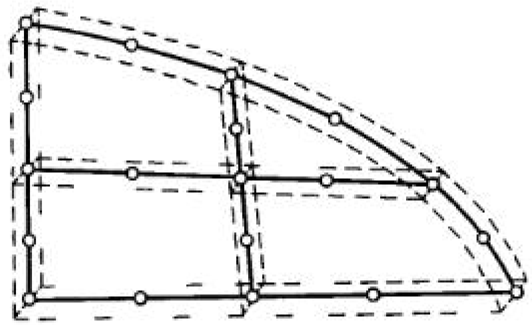
Среди пространственных элементов чаще всего встречаются тетраэдры и гексаэдры. Они также могут иметь криволинейные грани.



а



б

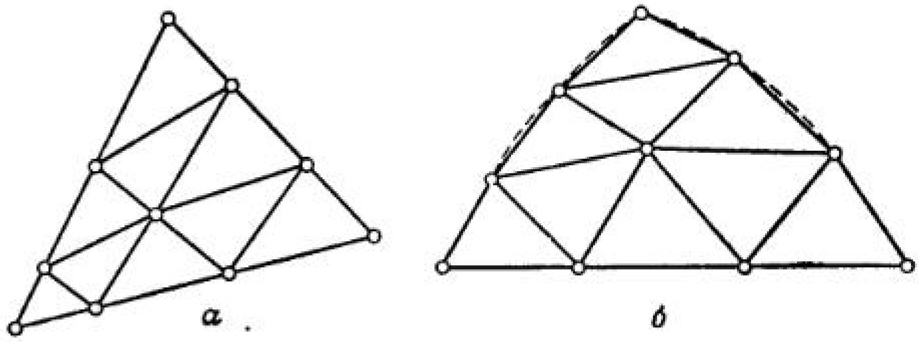


в

Разбиение области на элементы

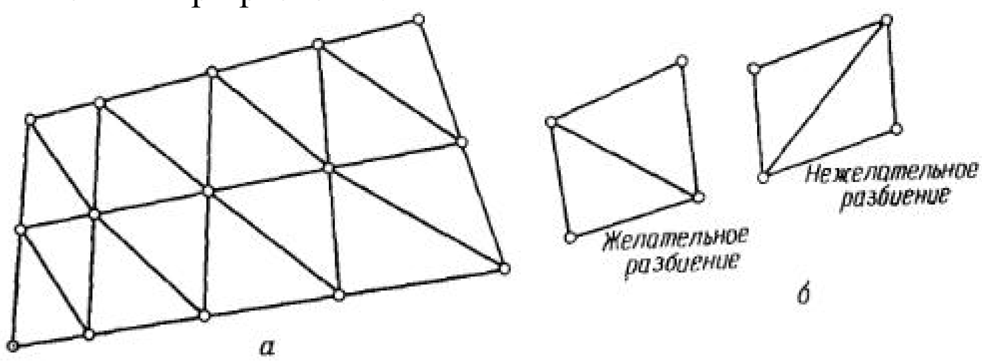
Процесс дискретизации области обычно разделяют на два этапа - разбиение объема на элементы и нумерация узлов и элементов. В качестве примера рассмотрим процесс дискретизации плоской области на треугольники. Сначала область делится на четырехугольные или треугольные подобласти, которые на следующем этапе разделяются на треугольники. Границы между подобластями стараются проводить там, где меняется геометрия модели, нагрузка или свойства материалов.

Наиболее простой способ разбиения плоской треугольной области на треугольники следующий: выбирается определенное число узлов на каждой стороне, соответствующие узлы соединяются прямыми линиями, а точки пересечения этих линий считают узлами. На рисунке треугольная область разбита на 9 треугольников.



Если треугольная область является криволинейной, то границы заменяются прямыми отрезками.

Четырехугольные области разбивают на элементы при помощи соединения узлов на противоположных сторонах. Пересечения линий определяют внутренние узлы. Внутренние элементы можно разбить на треугольники при помощи проведения коротких диагоналей. При таком разбиении получится меньше вытянутых элементов, которые менее предпочтительны при расчетах.



В задачах, когда присутствуют концентрации напряжений, особенности геометрии и т.п. стараются не делать равномерные разбиения. Возможность варьирования размеров элементов является одним из достоинств МКЭ.