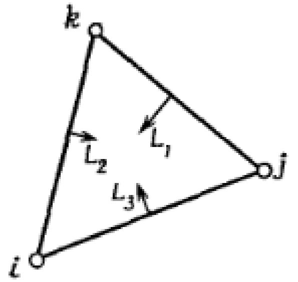
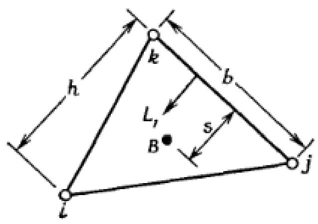
Лекция 13. МКЭ. *L*-координаты.

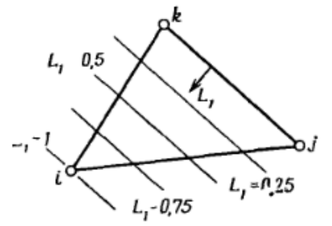
Для треугольных элементов вычислительной сетки наиболее часто используются естественные координатные системы, которые определяются с помощью трех относительных координат L_1, L_2, L_3, которые изображены на следующем рисунке.



Каждая из перечисленных координат – это отношение расстояния от точки треугольника до одной из его сторон к длине высоты h, которая опускается на эту сторону из противоположной вершины треугольника.

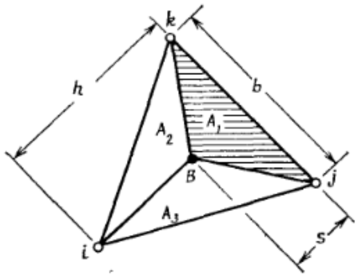


Очевидно, что такие координаты L_1, L_2, L_3 могут принимать значения из отрезка $[0, 1]$. На следующем рисунке показаны линии, вдоль которых координата L_1 принимает одинаковые значения. Эти линии параллельны той стороне, от которой измеряют данную координату.



Описанные выше координаты L_1, L_2, L_3 называют L-координатами. Значения L-координат дают относительные величины площадей треугольников, на которые разбивается элемент.

L_1-координата произвольной точки B, показанной на следующем рисунке, дает отношение заштрихованного треугольника Bjk к площади всего треугольника ijk.



Площадь треугольника ijk определяется соотношением $A = \frac{bh}{2}$, а площадь заштрихованного треугольника $A_1 = \frac{bs}{2}$. Тогда $\frac{A_1}{A} = \frac{s}{h} = L_1$.

Для других координат можно записать аналогичные формулы

$$L_2 = \frac{A_2}{A},\ L_3 = \frac{A_3}{A}.$$

Равенство $A_1 + A_2 + A_3 = A$ дает нам $L_1 + L_2 + L_3 = 1$.

Последнее уравнение показывает связь между тремя координатами. Его вывод очевиден, так как в плоском случае не может быть трех независимых координат, а произвольная точка описывается только двумя координатами.

Дальнейшее изучение этих координат показывает, что они являются функциями формы для треугольного симплекс-элемента.

$$N_i = L_1,\ N_j = L_2,\ N_k = L_3.$$

На самом деле, $L_1 = \begin{cases} 1 \text{ в узле с номером } i \\ 0 \text{ в других узлах} \end{cases}$. Для других координат выполняются такие же соотношения.

Далее если записать зависимости между декартовыми координатами точки, ее L-координатами и координатами узлов элемента, то получим

$$x = L_1 X_i + L_2 X_j + L_3 X_k$$

$$y = L_1 Y_i + L_2 Y_j + L_3 Y_k$$

$$1 = L_1 + L_2 + L_3$$

и разрешить их относительно L_1, L_2, L_3, то получим в итоге соотношения, идентичные тем, которые были получены для функций формы ранее.

Основное преимущество таких координат состоит в том, что при их использовании становится возможным применять следующие интегральные формулы. Они применяются для вычисления интегралов вдоль стороны конечного элемента, а также по его площади

$$\int_\gamma L_1^a L_2^b L_3^c d\gamma = \frac{a!b!}{(a+b+1)!}\gamma,$$

$$\int_A L_1^a L_2^b L_3^c dA = \frac{a!b!}{(a+b+c+2)!}A.$$

Формулы были опубликованы в 1973 году в статье Martin A. Eisenberg, Lawrence E. Malvern On finite element integration in natural co-ordinate в журнале International Journal for Numerical Methods in Engineering Volume 7, Issue 4, 1973.

Последнее соотношение можно применить для вычисления интеграла такого вида

$$\int_A N_i N_j dA,$$

где N_i, N_j являются функциями от координат. Посчитаем данный интеграл по площади элемента

$$\int_A N_i N_j dA = \int_A L_1^1 L_2^1 L_3^0 dA = \frac{1!1!0!}{(1+1+0+2)!} 2A = \frac{2A}{4!} = \frac{A}{12}.$$

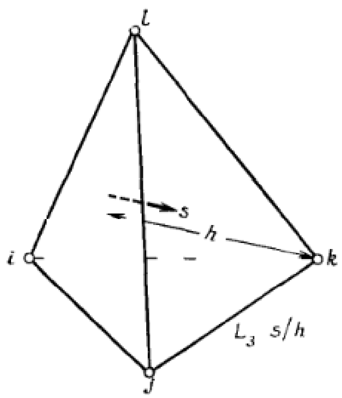
В данном примере координаты L_1, L_2 соответствуют функциям формы N_i, N_j. Так как в подынтегральное выражение функция формы N_k не вошла, то показатель степени у координаты L_3 равен нулю.

Первое соотношение для нахождения интегралов с использованием L координат применяется для нахождения интегралов вдоль стороны конечного элемента. А величина γ – расстояние между узлами этой стороны.

Что касается объемных L координат, то они вводятся подобным образом. Четыре относительных координаты определяют как отношения расстояний от выбранной точки внутри тетраэдра до одной из его граней к длине высоты, опущенной на эту грань из противоположной вершины. В трехмерном случае L координаты L_1, L_2, L_3, L_4 называют объемными. Так же, как и в плоском случае, они связаны соотношением

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1.$$

Для линейного тетраэдра функции формы представляют собой объемные L координаты.



В трехмерном случае объемные L координаты применяют для нахождения объемных интегралов

$$\int_V L_1^a L_2^b L_3^c L_4^d dV = \frac{a!b!c!d!}{(a+b+c+d+3)!} 6V.$$