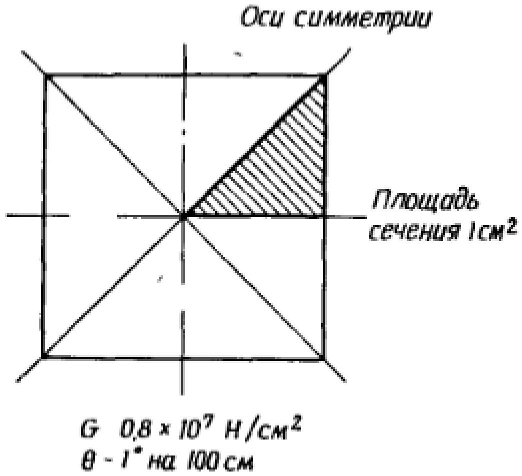
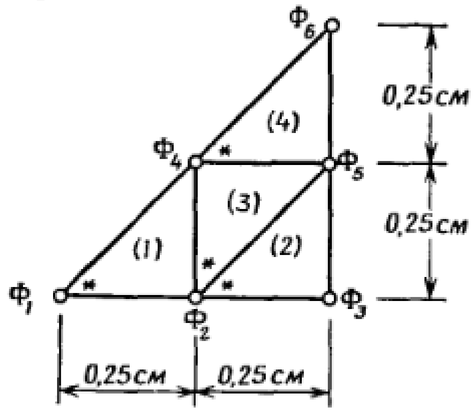
Лекция 12. МКЭ. Построение матриц элементов.

Рассмотрим стержень квадратного поперечного сечения и покажем, как формируется система линейных алгебраических уравнений. У такого стержня имеется 4 оси симметрии, поэтому будем рассматривать только восьмую часть квадрата.



а

Разобьем эту часть квадрата на 4 элемента, как показано на следующем рисунке.



б

Очевидно, что такого количества элементов для выполнения качественного расчета недостаточно, тем не менее, в учебных целях 4 элемента подойдут.

Запишем интерполяционные полиномы для используемых элементов в следующем виде

$$\varphi^{(1)} = N_1^{(1)}\Phi_1 + N_2^{(1)}\Phi_2 + 0\Phi_3 + N_4^{(1)}\Phi_4 + 0\Phi_5 + 0\Phi_6,$$
$$\varphi^{(2)} = 0\Phi_1 + N_2^{(2)}\Phi_2 + N_3^{(2)}\Phi_3 + 0\Phi_4 + N_5^{(2)}\Phi_5 + 0\Phi_6,$$
$$\varphi^{(3)} = 0\Phi_1 + N_2^{(3)}\Phi_2 + 0\Phi_3 + N_4^{(3)}\Phi_4 + N_5^{(3)}\Phi_5 + 0\Phi_6,$$
$$\varphi^{(4)} = 0\Phi_1 + 0\Phi_2 + 0\Phi_3 + N_4^{(4)}\Phi_4 + N_5^{(4)}\Phi_5 + N_6^{(4)}\Phi_6.$$

Формула, определяющая матрицу жесткости для элемента, выглядит следующим образом

$$\left[k^{(e)}\right] = \int_V \left[B^{(e)}\right]^T \left[B^{(e)}\right] dV.$$

В формуле учли, что $[D]=[I]$. Подробнее рассмотрим первый элемент и найдем производные, составляющие матрицу $\left[B^{(1)}\right]$

$$\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial x} = \left[\frac{\partial N_1^{(1)}}{\partial x}\ \frac{\partial N_2^{(1)}}{\partial x}\ 0\ \frac{\partial N_4^{(1)}}{\partial x}\ 0\right] = \frac{1}{2A^{(1)}}\left[b_1^{(1)}\ b_2^{(1)}\ 0\ b_3^{(1)}\ 0\ 0\right]$$

$$\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial y} = \left[\frac{\partial N_1^{(1)}}{\partial y} \ \frac{\partial N_2^{(1)}}{\partial y} \ 0 \ \frac{\partial N_4^{(1)}}{\partial y} \ 0 \right] = \frac{1}{2A^{(1)}} \left[c_1^{(1)} \ c_2^{(1)} \ 0 \ c_3^{(1)} \ 0 \ 0 \right].$$

Тогда матрица градиентов $\left[B^{(1)}\right]$ примет вид

$$\left[B^{(1)}\right] = \frac{1}{2A^{(1)}} \begin{bmatrix} b_1^{(1)} & b_2^{(1)} & 0 & b_3^{(1)} & 0 & 0 \\ c_1^{(1)} & c_2^{(1)} & 0 & c_3^{(1)} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Площадь данного элемента $A^{(1)} = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32}$ и $\frac{1}{2A^{(1)}} = 16.$

Посчитаем коэффициенты в матрице градиентов

$$b_1^{(1)} = Y_2 - Y_4 = 0.25, \ c_1^{(1)} = X_4 - X_2 = 0,$$

$$b_2^{(1)} = Y_4 - Y_1 = 0.25, \ c_2^{(1)} = X_1 - X_4 = -0.25,$$

$$b_4^{(1)} = Y_1 - Y_2 = 0, \quad c_4^{(1)} = X_2 - X_1 = 0.25.$$

Тогда $\left[B^{(1)}\right] = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

Найдем произведение $\left[B^{(1)}\right]^T \left[B^{(1)}\right]$

$$\left[B^{(1)}\right]^T \left[B^{(1)}\right] = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 4 & -4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -16 & 32 & 0 & -16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Интеграл от этой матрица и дает нам матрицу жесткости элемента. Так как $\left[B^{(1)}\right]^T \left[B^{(1)}\right]$ – постоянная величина, то ее можно вынести из-под знака интеграла, что дает нам

$$\left[k^{(1)}\right] = \left[B^{(1)}\right]^T \left[B^{(1)}\right] \int_{V_1} dV = \left[B^{(1)}\right]^T \left[B^{(1)}\right] A^{(1)}.$$

Толщину элемента при этом положили равной 1. В итоге получим окончательную матрицу жесткости первого элемента

$$\left[k^{(1)}\right] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Объемный интеграл $\left\{f^{(1)}\right\} = \int\limits_{V^{(1)}} 2G^{(1)}\theta \begin{bmatrix} N_1^{(1)} \\ N_2^{(1)} \\ 0 \\ N_4^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} dV$ можно вычислить, используя L-координаты. Здесь мы не будем приводить теорию L-координат, а просто применим готовые формулы. Рассмотрим три координаты $L_1 = N_1^{(1)}, L_2 = N_2^{(1)}, \ L_3 = N_4^{(1)}.$

Объемный интеграл запишем в L-координатах

$$\left\{f^{(1)}\right\}=\int\limits_{V^{(1)}} 2G^{(1)}\theta \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ 0 \\ L_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} dV.$$

Предполагая, что элемент имеет единичную толщину и используя интегральную формулу $\int\limits_A L_1^a L_2^b L_3^c dA = \dfrac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!}2A$, получим

$$\left\{f^{(1)}\right\}=\frac{2G^{(1)}\theta A^{(1)}}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Если подставить сюда значения констант и угла закрутки ($G = 0.8\cdot 10^7\ H/см^2$, $\theta = \dfrac{\pi}{180}\dfrac{1}{100}$ - закрутка 1 градус на длине 100 см)

$$\left\{f^{(1)}\right\}=\begin{Bmatrix} 29.07 \\ 29.07 \\ 0 \\ 29.07 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Тогда система уравнений для первого элемента будет иметь следующий вид

$$\left[k^{(1)}\right]\{\Phi\}=\left\{f^{(1)}\right\} \text{ или}$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 29.07 \\ 29.07 \\ 0 \\ 29.07 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Аналогичным образом получаются системы уравнений для других элементов. Запишем окончательную систему уравнений для 4 элементов. Эта система получается с помощью алгебраического суммирования уравнений для отдельных элементов.

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 29.07 \\ 87.22 \\ 29.07 \\ 87.22 \\ 87.22 \\ 29.07 \end{Bmatrix}.$$

Узловые значения Φ_3, Φ_5, Φ_6 равняются нулю, так как узлы с этими номерами располагаются на внешней границе. Систему уравнений можно преобразовать и решить. Решение системы записывается следующим образом

$$\begin{aligned}
&\Phi_1 = 218.16, \quad &\Phi_3 = 0,\\
&\Phi_2 = 160, \quad &\Phi_5 = 0,\\
&\Phi_4 = 123.63, \quad &\Phi_6 = 0.
\end{aligned}$$

Преобразование матрицы рассмотрим в следующих лекциях, когда будем изучать реализацию метода конечных элементов на компьютерах. В следующей лекции уделим внимание получению других величин на основе найденных узловых значений.