

Лекция 12. МКЭ. Продолжение – стандартные результаты элемента.

В рассматриваемой задаче о кручении стержня важными результатами являются производные от искомой функции, то есть напряжения сдвига.

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Их легко можно найти, так как матрицу градиентов для каждого элемента мы уже вычислили.

Для первого элемента она определяется по следующей формуле

$$\{g^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{Bmatrix} = [B^{(1)}]\{\Phi\}.$$

$$\{g^{(1)}\} = \frac{1}{2A^{(1)}} \begin{bmatrix} b_1^{(1)} & b_2^{(1)} & 0 & b_4^{(1)} & 0 & 0 \\ c_1^{(1)} & c_2^{(1)} & 0 & c_4^{(1)} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \end{Bmatrix}.$$

С учетом сделанных в прошлой лекции вычислений получаем

$$\{g^{(1)}\} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 218.16 \\ 160.0 \\ 0 \\ 123.63 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 232.6 \\ 145.4 \end{Bmatrix}.$$

Тогда $\tau_{zx}^{(1)} = 145.4$, $\tau_{zy}^{(1)} = 232.6$.

Аналогично вычисляют компоненты тензора напряжений для других элементов. Постоянство сдвиговых напряжений в каждом элементе объясняется тем, что для расчета использовались линейные относительно координат интерполяционные полиномы. Основной недостаток симплекс элементов – невозможность получить переменные по площади элемента производные.

В данном примере можно тремя способами. Первый – увеличение числа элементов. В таком случае размеры элементов уменьшаются, и получаемые значения напряжений будут более близкими к действительным. Второй способ – использование треугольных элементов с большим числом узлов. В таком случае интерполяционные полиномы могут быть второго и третьего порядков. В результате вычислений мы получим градиенты,

являющиеся функциями координат. Третий способ – использование теории сопряженной аппроксимации. Применение данной теории рассмотрим в следующих лекциях.