Лекция 11. МКЭ. Дифференцирование матричных соотношений. Продолжение рассмотрения задач теории поля.

При минимизации функционала приходится дифференцировать матричные произведения $[N]\{\Phi\}$ и $\{\Phi\}^T[A]\{\Phi\}$ по $\{\Phi\}$. Здесь $[N]$ является вектор-строкой, а $[A]$ представляет собой квадратную матрицу. Данное дифференцирование проводится довольно просто, тем не менее, рассмотрим здесь его более подробно.

Запишем соотношение $\varphi = [N]\{\Phi\}$, в котором $[N] = [N_1\ N_2 \ldots N_r]$, $\{\Phi\}^T = [\Phi_1\ \Phi_2 \ldots \Phi_r]$.

Здесь нам необходимо рассчитать производную φ по $\{\Phi\}$, то есть $\partial\varphi / \partial\{\Phi\}$. Данная производная выглядит следующим образом

$$\partial\varphi / \partial\{\Phi\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial\Phi_1} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\Phi_2} \\ \ldots \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\Phi_r} \end{Bmatrix}.$$

Компоненты этого вектор-столбца вычисляются следующим образом

$$\varphi = N_1\Phi_1 + N_2\Phi_2 + \ldots + N_r\Phi_r .$$

Если продифференцировать это соотношение, то получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\Phi_1} = N_1,\ \frac{\partial\varphi}{\partial\Phi_2} = N_2,\ \ldots,\ \frac{\partial\varphi}{\partial\Phi_r} = N_r.$$

Подставив эти выражения в $\partial\varphi / \partial\{\Phi\}$, получаем

$$\partial\varphi / \partial\{\Phi\} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \ldots \\ N_r \end{Bmatrix} = [N]^T.$$

Производная от $\{\Phi\}^T[N]^T$ по $\{\Phi\}$ дает то же самое.

Возьмем произведение следующего вида $\{\Phi\}^T[A]\{\Phi\}$. Нахождение его производной довольно просто проиллюстрировать, если взять небольшое число коэффициентов матрицы $[A]$. Рассмотрим симметричную матрицу $[A]$ в виде

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}, \text{ вектор } \{\Phi\}^T = [\Phi_1\Phi_2].$$

С использованием условия симметрии матрицы $[A]$ запишем

$$\varphi = \{\Phi\}^T [A]\{\Phi\} = a_{11}\Phi_1^2 + 2a_{12}\Phi_1\Phi_2 + a_{22}\Phi_2^2.$$

Дифференцируя это соотношение, получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\Phi_1} = 2a_{11}\Phi_1 + 2a_{12}\Phi_2, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\Phi_2} = 2a_{21}\Phi_1 + 2a_{22}\Phi_2.$$

Тогда запишем окончательно соотношение для производной

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\{\Phi\}} = \begin{bmatrix} 2a_{11}\Phi_1 + 2a_{12}\Phi_2 \\ 2a_{21}\Phi_1 + 2a_{22}\Phi_2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} \text{ или}$$

$$\frac{\partial}{\partial\{\Phi\}}\left(\{\Phi\}^T [A]\{\Phi\}\right) = 2[A]\{\Phi\}.$$

Вернемся к рассмотрению дифференцирования функционала, о котором велась речь в прошлой лекции.

Будем находить производные слагаемых, входящих в формулу (17) лекции 10.

$$\frac{\partial}{\partial\{\Phi\}}\left(\frac{1}{2}\int_{V^{(e)}}\left(\{\Phi\}^T\left[B^{(e)}\right]^T\left[D^{(e)}\right]\left[B^{(e)}\right]\{\Phi\}\right)dV\right) = \int_{V^{(e)}}\left(\left[B^{(e)}\right]^T\left[D^{(e)}\right]\left[B^{(e)}\right]\{\Phi\}\right)dV,$$

$$\frac{\partial}{\partial\{\Phi\}}\left(\int_{V^{(e)}} Q\left[N^e\right]\{\Phi\}dV\right) = \int_{V^{(e)}} Q\left[N^e\right]^T dV,$$

$$\frac{\partial}{\partial\{\Phi\}}\left(\int_{S_1^{(e)}} q\left[N^e\right]\{\Phi\}dS\right) = \int_{S_1^{(e)}} q\left[N^e\right]^T dS,$$

$$\frac{\partial}{\partial\{\Phi\}}\left(\int_{S_2^{(e)}} \frac{h}{2}\{\Phi\}^T\left[N^e\right]^T\left[N^{(e)}\right]\{\Phi\}dS\right) = \int_{S_2^{(e)}} h\left[N^e\right]^T\left[N^{(e)}\right]\{\Phi\}dS,$$

$$\frac{\partial}{\partial\{\Phi\}}\left(\int_{S_2^{(e)}} h\varphi_\infty\left[N^{(e)}\right]\{\Phi\}dS\right) = \int_{S_2^{(e)}} h\varphi_\infty\left[N^{(e)}\right]^T dS,$$

$$\frac{\partial}{\partial\{\Phi\}}\left(\int_{S_2^{(e)}} \frac{h}{2}\varphi_\infty^2 dS\right) = 0.$$

Тогда запишем вклад отдельного элемента в общую сумму

$$\frac{\partial\chi^{(e)}}{\partial\Phi} = \int_{V^{(e)}}\left(\left[B^{(e)}\right]^T\left[D^{(e)}\right]\left[B^{(e)}\right]\{\Phi\}\right)dV - \int_{V^{(e)}} Q\left[N^e\right]^T dV + \int_{S_1^{(e)}} q\left[N^e\right]^T dS +$$

$$+\int_{S_2^{(e)}} h\left[N^e\right]^T\left[N^{(e)}\right]\{\Phi\}dS - \int_{S_2^{(e)}} h\varphi_\infty\left[N^{(e)}\right]^T dS.$$

Запишем интегралы в компактном виде

$$\frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial \Phi} = \left[k^{(e)}\right]\{\Phi\} + \left\{f^{(e)}\right\}, \text{ где}$$

$$\left[k^{(e)}\right] = \int\limits_{V^{(e)}} \left(\left[B^{(e)}\right]^T \left[D^{(e)}\right]\left[B^{(e)}\right]\{\Phi\}\right) dV + \int\limits_{S_2^{(e)}} h\left[N^e\right]^T \left[N^{(e)}\right]\{\Phi\} dS,$$

$$\left\{f^{(e)}\right\} = -\int\limits_{V^{(e)}} Q\left[N^e\right]^T dV + \int\limits_{S_1^{(e)}} q\left[N^e\right]^T dS - \int\limits_{S_2^{(e)}} h\varphi_\infty \left[N^{(e)}\right]^T dS.$$

Окончательно получаем следующую систему уравнений для нахождения неизвестных узловых значений

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{\Phi\}} = \sum_{e=1}^{E} \left(\left[k^{(e)}\right]\{\Phi\} + \left\{f^{(e)}\right\}\right) = 0.$$

Или $[K]\{\Phi\} = \{F\}$, где $[K] = \sum\limits_{e=1}^{E}\left[k^{(e)}\right]$, $\{F\} = -\sum\limits_{e=1}^{E}\left\{f^{(e)}\right\}$.

Первая – матрица теплопроводности, вторая – вектор нагрузок.

Перейдем к задаче о **кручении стержня некругового сечения**.

Ранее мы рассматривали вопросы, касающиеся дискретизации тела, построения интерполяционного многочлена для отдельного элемента и применение интерполяционных многочленов для всей дискретизованной области, а также мы давали вывод основных уравнений. Здесь мы будем рассматривать реализацию метода конечных элементов для конкретных задач. Мы должны проиллюстрировать все этапы метода. Мы достигнем этой цели, рассматривая численное решение задачи о кручении некругового стержня.

Данная задача выбрана неслучайно. В таком случае довольно легко вывести уравнения МКЭ. Матрицу жесткости можно относительно быстро вычислить , а интегралы по границе обращаются в нуль по причине нулевых граничных условий для значений искомой функции.

Теория кручения стержней

Если рассматривать цилиндрические стержни произвольного сечения, то при кручении сдвиговые напряжения вычисляются по формулам

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \; \tau_{zy} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad (1)$$

функция φ является функцией напряжений, которая отыскивается из дифференциального уравнения

$$\frac{1}{G}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{1}{G}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2\theta = 0. \qquad (2)$$

Граничное условие записывается следующим образом

$$\varphi = 0.$$

В уравнение (2) входят угол закручивая и модуль сдвига материала. В данной постановке уравнение не входит крутящий момент, который можно найти после отыскания решения уравнения (1) из выражения

$$T = 2\int_{\Sigma} \varphi dA.$$

Уравнение (2) записывают в виде

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2G\theta = 0. \qquad (3)$$

Функционал, который необходимо минимизировать для нахождения решения с помощью МКЭ, может быть записан в виде

$$\chi = \int_V \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 - 2G\theta \right) dV \,. \qquad (4)$$

Перепишем функционал (4) в соответствии с изложенным в прошлой лекции

$$\chi = \int_V \left(\frac{1}{2}\{g\}^T [D]\{g\} - (2G\theta)\varphi \right) dV, \qquad (5)$$

где

$$\{g\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 \\ 0 & K_{yy} \end{bmatrix}.$$

Вектор-столбец $\{g\}$ – сдвиговые напряжения, а матрица $[D]$ превращается в единичную, так как $K_{xx} = K_{yy} = 1$.

При минимизации функционала (5) получаем систему линейных уравнений

$$\sum_{e=1}^{E} \int_{V^{(e)}} \left[B^{(e)}\right]^T \left[D^{(e)}\right]\left[B^{(e)}\right] dV \{\Phi\} = \sum_{e=1}^{E} \int_{V^{(e)}} \left[N^{(e)}\right]^T (2G\theta) dV.$$