Лекция 10. МКЭ.
Уравнения метода конечных элементов для задач теории поля

Ранее мы рассматривали одномерную задачу о распространении тепла в стержне.

Запишем общее квазигармоническое уравнение, из которого можно получить частные уравнения, описывающие тот или иной процесс.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_{xx}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_{yy}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_{zz}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)+Q=0. \qquad (1)$$

К уравнению добавляются следующие граничные условия

$$\varphi=\varphi_B \text{ на } S_1 \qquad (2)$$

и (или)

$$K_{xx}\frac{\partial\varphi}{\partial x}l_x+K_{yy}\frac{\partial\varphi}{\partial y}l_y+K_{zz}\frac{\partial\varphi}{\partial z}l_z+q+h(\varphi-\varphi_\infty)=0 \text{ на } S_2. \qquad (3)$$

Полная граница исследуемой области образуется при объединении S_1 и S_2. Предполагается, что коэффициенты K_{xx}, K_{yy}, K_{zz}, а также q могут быть функциями пространственных переменных, но не зависят от φ. l_x, l_y, l_z – направляющие косинусы нормали к поверхности.

Краевая задача, состоящая из уравнения (1) и граничных условий (2), (3), используется для описания распространения тепла в трехмерных областях. В такой постановке коэффициенты K_{xx}, K_{yy}, K_{zz} – коэффициенты теплопроводности, Q – внутренний источник тепла, а q определяет тепловой поток на части поверхности, h – коэффициент теплообмена. Функция φ, называемая полевой, представляет собой температуру тела. Для одномерных и двумерных задач можно получить соответствующие уравнения, положив равными нулю $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ и/или $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$.

Если рассматривается теплоизолированная граница, то на S_2 $q=0, h=0$, что дает

$$K_{xx}\frac{\partial\varphi}{\partial x}l_x+K_{yy}\frac{\partial\varphi}{\partial y}l_y+K_{zz}\frac{\partial\varphi}{\partial z}l_z=0 \text{ на } S_2. \qquad (4)$$

Далее рассмотрим двумерный случай, когда $K_{xx}=K_{yy}=1$ и $Q=2G\theta$ и $\varphi_B=0$. Тогда уравнение (1) упрощается

$$K_{xx}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+K_{yy}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+2G\theta=0. \qquad (5)$$

Уравнение (5) будет использоваться нами в задаче о кручении упругого стержня некругового сечения. Функция φ в данной задаче будет являться функцией напряжений, G – упругая постоянная материала стержня, а θ – угол закручивания стержня. Напряжения сдвига, которые возникают при воздействии внешним скручивающим усилием, могут быть получены с помощью дифференцирования функции напряжений φ по переменным x, y.

Не менее важным приложением уравнения (1) является использование его в качестве уравнения безвихревого течения жидкости. Тогда $K_{xx} = K_{yy} = 1$, $Q = 0$, следовательно, уравнение (1) дает

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \qquad (6)$$

Граничные условия запишутся в виде

$$\varphi = \varphi_B \text{ и } \frac{\partial \varphi}{\partial x} l_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} l_y = 0. \qquad (7)$$

Если полевую функцию задавать на непроницаемых границах расчетной области, то (6) будет определять линии тока такого безвихревого течения.

Вернемся к рассмотрению уравнения (1) с граничными условиями (2) и (3). С вариационной точки зрения такая постановка эквивалентна отысканию минимального значения следующего функционала

$$\chi = \int_V \frac{1}{2}\left(K_{xx} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + K_{yy} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + K_{zz} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - 2Q\varphi \right) dV + \int_S \left(q\varphi + \frac{1}{2} h(\varphi - \varphi_\infty)^2 \right) dS. \quad (8)$$

Минимизация функционала (8) осуществляется на множестве узловых значений $\{\Phi\}$. Сначала будем проводить процедуру минимизации функционала до вычисления интегралов. Такой подход даст возможность выбрать параметры элементов, наиболее удобные для выбранной задачи.

Сначала преобразуем функционал (8), для чего введем новые матрицы.

$$\{g\}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & K_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & K_{zz} \end{bmatrix}. \qquad (9)$$

Тогда функционал (8) примет следующий вид

$$\chi = \int_V \frac{1}{2}\left(\{g\}^T [D]\{g\} - 2\varphi Q \right) dV + \int_{S_1} \varphi q dS + \int_{S_2} \frac{h}{2}\left(\varphi^2 - 2\varphi\varphi_\infty + \varphi_\infty^2 \right) dS. \qquad (10)$$

Мы помним, что функции, зависящие от φ не являются непрерывными по исследуемой области, поэтому введем в рассмотрение функции $\varphi^{(e)}$, которые определяются на отдельных элементах. Интегралы в (10) разбиваются на интегралы по каждому элементу в отдельности, поэтому

$$\chi = \sum_{e=1}^{E} \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2}\left(\left\{g^{(e)}\right\}^T \left[D^{(e)}\right]\left\{g^{(e)}\right\} \right) dV - \int_{V^{(e)}} \varphi^{(e)} Q dV + \int_{S_1^{(e)}} \varphi^{(e)} q^{(e)} dS +$$

$$+ \int_{S_2^{(e)}} \frac{h}{2}\left(\varphi^{(e)}\varphi^{(e)} - 2\varphi^{(e)}\varphi_\infty + \varphi_\infty^2 \right) dS. \qquad (11)$$

В данном выражении E – общее число конечных элементов. Соотношение (11) можно записать в упрощенном виде

$$\chi = \chi^{(1)} + \chi^{(2)} + \ldots + \chi^{(E)} = \sum_{e=1}^{E} \chi^{(e)}. \qquad (12)$$

В данном выражении $\chi^{(e)}$ – вклад каждого конечного элемента.

Для того чтобы минимизировать χ, необходимо выполнить соотношения

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{\Phi\}} = \frac{\partial}{\partial \{\Phi\}} \sum_{e=1}^{E} \chi^{(e)} = \sum_{e=1}^{E} \frac{\partial}{\partial \{\Phi\}} \left(\chi^{(e)}\right) = 0. \qquad (13)$$

В (12) невозможно найти частные производные $\frac{\partial}{\partial \{\Phi\}}\left(\chi^{(e)}\right)$, пока не будут найдены интегралы в выражении (10) не будут выражены через узловые значения, то есть через $\{\Phi\}$.

Вспомним, что

$$\varphi^{(e)} = \left\lfloor N^{(e)} \right\rfloor \{\Phi\}. \qquad (14)$$

Тогда мы можем найти $\{g^T\}$ из выражения (9) и подставим ее вместе с (14) в функционал (11).

Сначала запишем $\{g^{(e)}\}$

$$\{g^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} & \ldots & \dfrac{\partial N_p^{(e)}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & \dfrac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y} & \ldots & \dfrac{\partial N_p^{(e)}}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_1^{(e)}}{\partial z} & \dfrac{\partial N_2^{(e)}}{\partial z} & \ldots & \dfrac{\partial N_p^{(e)}}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \ldots \\ \Phi_p \end{Bmatrix}, \qquad (15)$$

или в матричном виде

$$\{g^{(e)}\} = \left\lfloor B^{(e)} \right\rfloor \{\Phi\}. \qquad (16)$$

В выражении (16) $\left\lfloor B^{(e)} \right\rfloor$ – матрица производных функций формы. Ее элементы пока неизвестны, так как остаются неопределенными функции формы. Формулы (14) и (16) позволяют нам записать интегралы по конечным элементам в (11) в следующем виде

$$\begin{aligned} \chi^{(e)} = \frac{1}{2} \int_{V^{(e)}} \left(\{\Phi\}^T \left[B^{(e)}\right]^T \left[D^{(e)}\right] \left[B^{(e)}\right] \{\Phi\} \right) dV - \int_{V^{(e)}} Q \left[N^e\right] \{\Phi\} dV + \int_{S_1^{(e)}} q \left[N^e\right] \{\Phi\} dS + \\ + \int_{S_2^{(e)}} \frac{h}{2} \{\Phi\}^T \left[N^e\right]^T \left[N^{(e)}\right] \{\Phi\} dS - \int_{S_2^{(e)}} h \varphi_\infty \left[N^{(e)}\right] \{\Phi\} dS + \int_{S_2^{(e)}} \frac{h}{2} \varphi_\infty^2 dS. \end{aligned} \qquad (17)$$

Величины Q, q, h, φ_∞ являются неизвестными коэффициентами. Они оставлены под знаком интеграла по той причине, что могут изменяться внутри конечного элемента. Дифференцирование выражения (17) по узловым величинам $\{\Phi\}$ - простая операция, тем не менее, требует некоторых пояснений, о которых мы поговорим в следующей лекции.