

ВВЕДЕНИЕ

На сегодняшний день конечно-элементные (КЭ) методы являются неотъемлемой частью инженерного анализа и разработок. КЭ пакеты используются практически во всех сферах науки, касающихся анализа строительных конструкций, твердых, жидких тел, а также их взаимодействия. Важным свойством данных методов является достоверность – возможность использования этих методов в компьютерном моделировании с достаточно большой долей уверенности в их надежности. Учитывая их широкую распространенность на данный момент, можно предположить, что в будущем сфера применения КЭ методов будет только расширяться. Бурное развитие КЭ методов началось с момента появления цифровых вычислительных машин. Это связано с тем, что только с использованием компьютера КЭ методы могут быть эффективно применены к инженерным задачам. Согласно теории КЭ методов, им присущи следующие два главных свойства: эффективность и применимость к инженерному анализу.

Первоначально КЭ методы развивались, основываясь на физических основах строительной механики. Однако вскоре обнаружилось, что данная техника может быть применена для нахождения решения задач многих других классов.

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ МЕТОДА КЭ

Метод КЭ успешно применяется в самых различных задачах. Он был создан для решения сложных уравнений теории упругости и строительной механики и оказался гораздо эффективнее метода конечных разностей. Этот метод незаменим, если нужно учитывать геометрические особенности областей.

С математической точки зрения метод КЭ представляет собой обобщение метода Релея-Ритца-Галеркина. Поэтому он применим к широкому классу уравнений в частных производных. В методе Ритца, однако, не решается непосредственно дифференциальное уравнение; вместо этого исходная задача представляется в эквивалентной вариационной

формулировке, а затем ищется приближенное решение последней в виде комбинации $\sum q_j \varphi_j$ заданных пробных функций $\varphi_j(x)$. При этом весовые коэффициенты q_i вычисляются из вариационного принципа, соответствующего задаче.

В методе КЭ пробные функции являются кусочно-полиномиальными. Каждая функция $\varphi_j(x)$ равна нулю на большей части области и отлична от нуля только в окрестности одного узла. В этой окрестности $\varphi_j(x)$ составлена из полиномов небольшой степени, и все вычисления становятся максимально простыми.

Метод КЭ можно описать несколькими словами. Пусть задача, которую нужно решить, поставлена в вариационной форме: требуется найти функцию u , минимизирующую заданный функционал потенциальной энергии. Необходимость минимизации приводит к дифференциальному уравнению для u , которое обычно нельзя решить точно и приходится применять приближенные методы. Идея метода Релея-Ритца-Галеркина состоит в том, что выбирается конечное число пробных функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ и среди всех линейных комбинаций вида $\sum q_j \varphi_j$ ищется комбинация, доставляющая минимум функционалу. Это аппроксимация Ритца. Неизвестные веса q_j определяются уже не из дифференциальных уравнений, а из системы N дискретных алгебраических уравнений, для решения которой можно применять ЭВМ. Теоретическое обоснование этого метода очень простое: процесс минимизации автоматически дает комбинацию, ближайшую к функции u . Таким образом, цель состоит в том, чтобы выбрать пробные функции φ_j достаточно удобными для вычисления и минимизации потенциальной энергии и в то же время обеспечить хорошее приближение неизвестного решения u .

Основополагающая идея метода КЭ весьма проста. Все начинается с разбиения исходной области на мелкие куски. Структура их должны быть понятна для распознавания с помощью ЭВМ. Это могут быть треугольники

или прямоугольники. Затем внутри каждого элемента разбиения задается пробная функция в максимально простой форме – обычно это полином, как правило, третьей или четвертой степени. Краевые условия гораздо проще поставить вдоль стороны треугольника или прямоугольника, чем сразу на всей границе области. Точность расчета повышается за счет более мелкого разбиения области. ЭВМ при этом работает по той же программе, только дольше.

Основная задача состоит в исследовании точности, с которой кусочно-полиномиальные функции могут аппроксимировать неизвестное решение u . Другими словами, надо определить, насколько хороши КЭ, построенные на основе вычислительной простоты, и дадут ли они хорошую аппроксимацию. Интуитивно ясно, что всякую достаточно хорошую функцию u можно с произвольной точностью приблизить кусочно-линейными функциями. Математическая задача состоит в получении максимально точной оценки ошибки и определении скорости убывания ошибки при возрастании количества элементов разбиения (или степени полинома внутри каждого элемента).

Основными этапами метода КЭ являются:

1. Вариационная постановка задачи.
2. Построение кусочно-полиномиальных пробных функций.
3. Вычисление матрицы и решение дискретной системы.
4. Оценка точности аппроксимации Рунге.

ПРОЦЕСС КЭ АНАЛИЗА

Физическая и математическая постановка задачи и КЭ решение

КЭ методы используются для решения задач инженерного анализа и проектирования. На рис. 1 изображен процесс КЭ анализа. *Физическая постановка задачи*, как правило, представляет собой какую-то конструкцию с приложенными к ней нагрузками. Идеализация физической постановки задачи и дальнейшее получение из нее математической модели предполагает наличие допущений, которые все вместе приводят к системе дифференциальных уравнений, представляющих *математическую постановку задачи*. Метод КЭ решает математическую модель. Учитывая, что метод КЭ является численным методом, немаловажным является достижение точности полученного результата. Если заданная точность не достигается, то нужно перерешать задачу с уточненными параметрами (например, более мелкая сетка) пока требуемый результат не будет получен.

Очевидно, что КЭ метод решает поставленную математическую задачу, следовательно, все упрощения, сделанные при постановке проблемы, отразятся на решении. Более того, кроме информации, содержащейся в математической постановке, о решении ничего предположить невозможно. Поэтому при выборе математической модели надо не только стремиться к ее максимальной простоте, но и требовать от нее точного описания поставленной физической задачи, полученной из анализа проблемы.

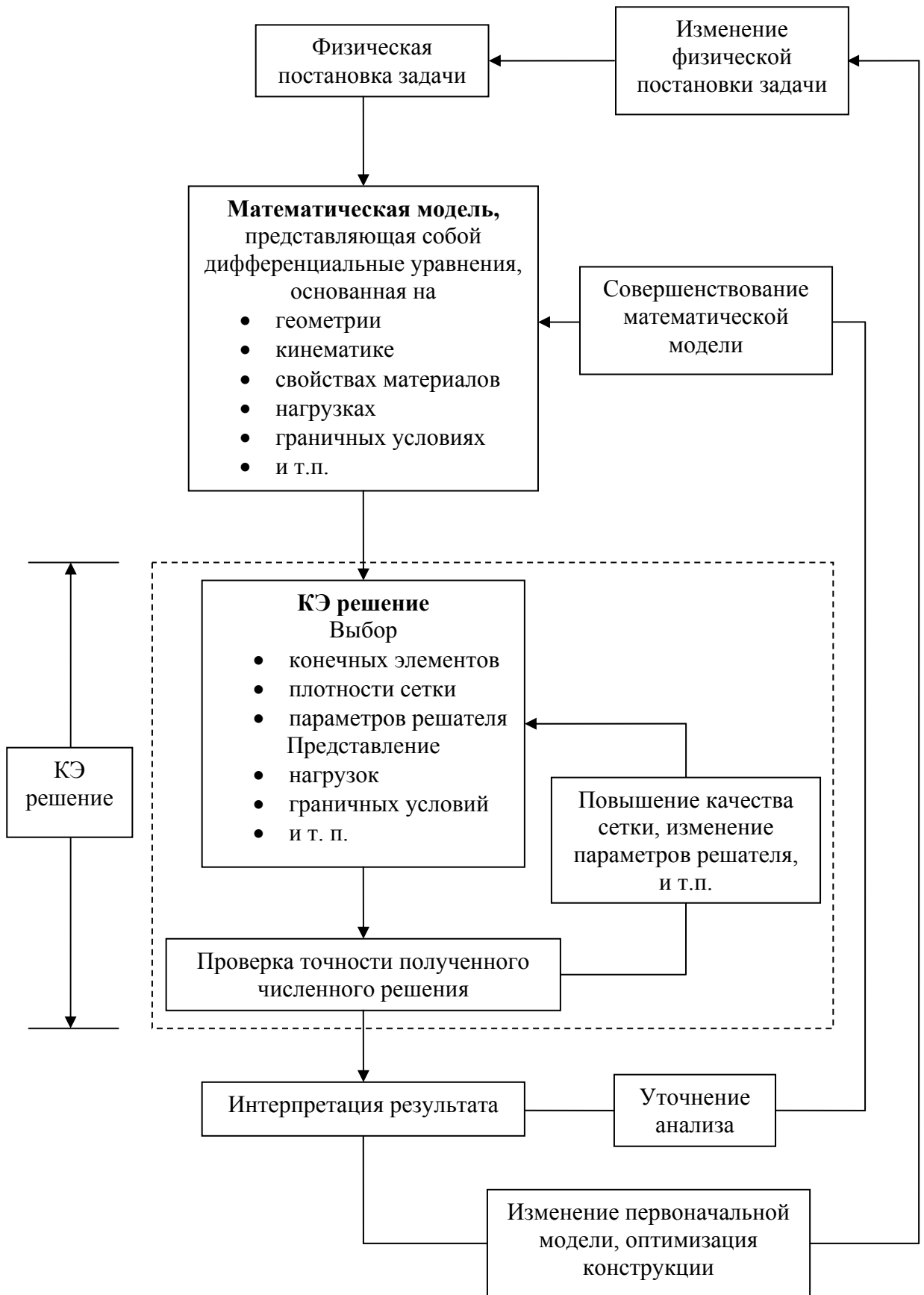


Рис. 1. Процесс КЭ анализа

Ключевым моментом в процессе инженерного анализа является выбор подходящей математической модели. Модель выбирается таким образом, чтобы она удовлетворяла критериям *достоверности* и *эффективности*. При определении надежности и эффективности математической модели требуется, чтобы она как можно полнее описывала физику явления, при этом сравнивается модель, построенная в результате анализа, с наиболее полной математической моделью. Вообще, наиболее полная математическая модель – трехмерная модель, в которой учитываются нелинейные эффекты.

Эффективность математической модели

Наиболее эффективной моделью называется модель, которая выдает решение с заданной точностью, при этом затраты на его нахождение не превышают первоначально заданных.

Достоверность математической модели

Выбранная математическая модель является достоверной, если требуемый результат с определенной точностью совпадает с результатом, полученным при решении наиболее полной математической модели.

Поэтому для того чтобы оценить полученное решение выбранной математической модели, иногда требуется также решить математические модели более высокого порядка, а в некоторых случаях можно говорить и о последовательности математических моделей (конечно, не все их требуется решать), которые усложняются по мере учета в них более сложных эффектов.

Отметим некоторые факты.

1. Выбор математической модели должен основываться на том, какой результат требуется получить.
2. Наиболее эффективная математическая модель – это такая модель, которая дает достоверное решение (например, с приемлемой ошибкой) с наименьшими затратами.
3. КЭ решение не дает информации больше, чем заложено в решаемой математической модели.

4. Понятие достоверности математической модели тесно связано с оценкой точности полученного решения выбранной математической модели (в ответ на поставленные вопросы) по сравнению с решением наиболее полной математической модели. Однако, на практике наиболее полная математическая модель обычно не решается, вместо этого используется инженерный опыт для ответа на вопрос, является ли выбранная математическая модель адекватной (то есть, достоверной).

КЭ анализ как составляющая процесса автоматизированного проектирования

Во времена, когда КЭ методы только начинали использоваться, они применялись в областях авиакосмической и гражданской промышленности. Однако, как только потенциал КЭ методов был раскрыт, и использование компьютеров в инженерных разработках стало повсеместным, КЭ анализ стал частью автоматизированного проектирования в областях машиностроительной, гражданской и авиационной инженерии. На рис. 2 показаны шаги типичного процесса автоматизированного проектирования. КЭ анализ является только небольшой, но очень важной частью этого процесса.

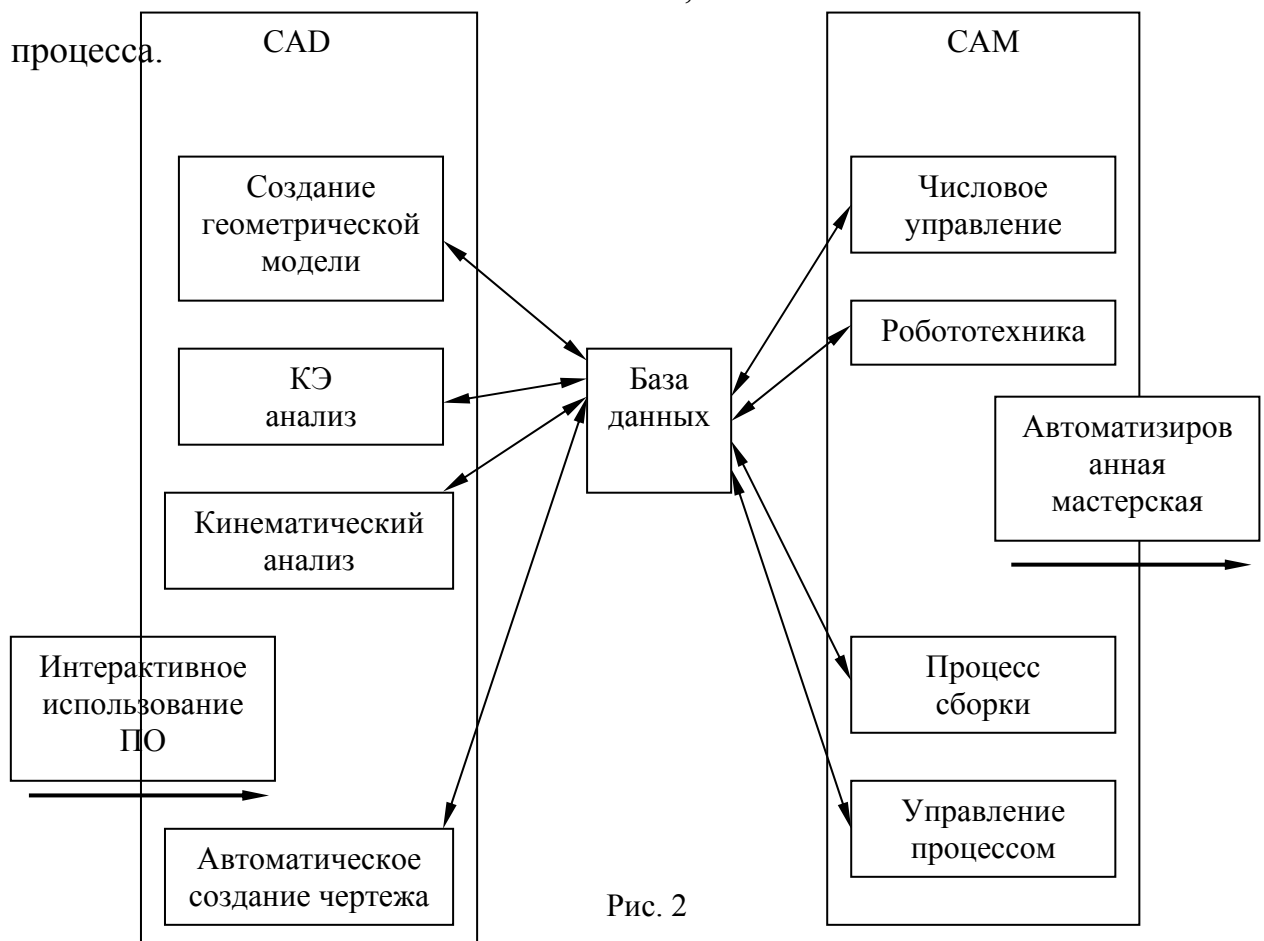


Рис. 2

На первом шаге проводят построение геометрической модели, для этого используется много различных программ, например, AutoCAD, SolidWorks и т.п. На следующем шаге нужно задать свойства материалов, граничные условия и приложить нагрузки. После этого может быть применен КЭ анализ. Учитывая, что геометрия модели, а также остальные данные могут быть достаточно сложны, иногда бывает необходимо упростить геометрию и способ нагружения, чтобы получить удобную для решения математическую модель. Конечно, математическая модель должна быть достоверной и эффективной, как уже говорилось выше. КЭ метод решает поставленную математическую модель, которая может изменяться и эволюционировать в зависимости от целей исследования (см. рис. 1).

Таким образом, мы понимаем, что данный процесс производится и должен производиться инженерами-разработчиками, то есть специалистами не только в области анализа, поэтому, очевидно, что КЭ метод должен быть надежным и устойчивым. Когда мы говорим про надежность КЭ методов, мы понимаем (заметим, что «надежность» КЭ метода отличается от «надежности» математической модели), что при решении правильно поставленной математической модели для корректной сетки КЭ методы должны давать корректное решение, и если сетка достаточно мелка, то всегда должно получаться достаточно точное решение.

Под устойчивостью КЭ методов понимается малая зависимость результата расчетов от параметров материалов, граничных условий, а также параметров нагружения. Следовательно, если КЭ метод неустойчивый, то он является ненадежным.